



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Indirizzo Spaziale

Modellizzazione 2D del moto degli elettroni in un motore ad effetto Hall

Candidato

Andrea Vignali

Relatori

Prof. M. Andrenucci

Prof. F. Paganucci

Anno Accademico 2003-2004

Sommario

Il presente lavoro ha lo scopo di studiare il comportamento degli elettroni all'interno del canale accelerativo di un motore ad effetto Hall. A tal fine, è stato sviluppato un codice numerico completamente bidimensionale, basato sulle equazioni fluide descritte dalla fisica classica dei plasmi.

Il dominio computazionale comprende tutto il canale accelerativo, più una parte della piuma racchiusa dalle pareti del motore e dalla linea di campo magnetico che simula il catodo del motore. Le condizioni al contorno sono poste, all'interno del canale, sul confine tra la guaina di parete ed il plasma libero, ed all'esterno, sul catodo. Il codice risolve le equazioni elettroniche discretizzandole su un sistema di coordinate magnetico, definito su tutto il dominio risolvendo le equazioni semplificate di Maxwell. Tale passaggio di coordinate causa una distorsione del dominio computazionale, che richiede un appropriato metodo risolutivo per mantenere la semplicità delle equazioni ricavate. Viene pertanto implementato un metodo ai volumi finiti "Cartesian Cut-Cell", che permette di risolvere il problema su una semplice griglia cartesiana, mantenendo l'accuratezza richiesta nell'imposizione delle condizioni al contorno. Le prime simulazioni complete mostrano un generale buon accordo con i risultati numerici presenti in letteratura, avvalorando il codice come buona base di partenza per successivi sviluppi.

Abstract

The present work has the purpose of studying electron's behaviour inside the accelerative channel in an Hall effect thruster. To this purpose, a numerical code completely bidimensional has been developed. The numerical code is based on fluid equations described by the classical plasma physics.

The computational domain includes all the accelerative channel, and also part of the plume closed by the motor walls and the magnetic field line which simulates the cathode. Boundary conditions are imposed, inside the channel, on the interface between the wall sheath and the free plasma, while external conditions are imposed on the cathode. The code solves electronic equations discretized on a magnetic coordinates system, which is defined over the whole domain solving Maxwell's simplified equations. This change of coordinates causes a distortion of the computational domain which demands for an appropriate solving method in order to preserve the simplicity of the equations so obtained. A finite volume method "Cartesian Cut-Cell" is applied, which permits to solve the problem over a simple Cartesian grid. This method allow us to maintain the accuracy which is requested on imposing boundary conditions. First results on simulations performed show a general good agreement with numerical results reported by several publications.

Ringraziamenti

Alla fine di questo lavoro di tesi desidero ringraziare coloro che mi hanno aiutato nella sua realizzazione e chi, in questi anni universitari, mi è stato vicino col suo aiuto e la sua amicizia.

Il Prof. Mariano Andrenucci per i suoi insegnamenti, la sua disponibilità e per avermi dato l'opportunità di svolgere questo lavoro nell'ambito della ricerca spaziale.

Tommaso, il cui prezioso aiuto e la cui guida sono stati indispensabili per portare a termine questa tesi, per tutto il tempo che mi ha dedicato, per la passione che mi ha trasmesso e per la sua amicizia.

La mia famiglia, che mi è stata sempre vicina ed ha sempre creduto in me; mio babbo e mia mamma, che mi hanno permesso di seguire i miei sogni, i miei nonni, che mi sopportano tutti i giorni, la nonna Fedora, per la forza che mi trasmette, i miei cugini, Martina, Luca e Michele, con i quali sono cresciuto, e tutti gli altri.

Tutti i miei amici: Andrea, l'amico di una vita, Giorgio, che ha condiviso con me tutti gli studi, Daniele, Giulio, Mario, Lollo e il Ponza, per tutto ciò che abbiamo combinato.

Un ringraziamento particolare alla persona che occupa un posto speciale nel mio cuore, Chiara. Grazie per avermi corretto la tesi, per avermi aiutato a fare la presentazione, per starmi accanto nonostante i miei sbalzi d'umore, per sapermi incoraggiare e per sapermi sgridare, perchè mi prepara tutti i giorni la merenda, perchè stare insieme non è mai banale e per la serenità che solo lei sa darmi.

Indice

I	Introduzione	16
1	Propulsione al Plasma	18
1.1	Concetti base sulla propulsione spaziale	18
1.2	La propulsione elettrica	20
2	Propulsori ad Effetto Hall	30
2.1	Richiami storici	30
2.2	Schema generale di un motore ad effetto Hall	30
2.3	Moto delle particelle e parametro di Hall	33
2.4	Processo accelerativo e generazione della spinta	36
3	Motivazioni ed Obiettivi dell'Analisi	40
3.1	Definizione del problema tecnico	40
3.2	Stato della ricerca numerica sui motori ad effetto Hall	40
3.3	Sviluppo del modello di riferimento	41
3.4	Obiettivi dello studio	42
II	Moto degli Elettroni	44
4	Descrizione del Modello Fluidico	46
4.1	Approssimazione 2D-3V	46
4.2	Principali assunzioni fisiche	46
4.2.1	Quasi neutralità	47
4.2.2	Momenti di una distribuzione di particelle	47
4.2.3	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	50
4.3	Collisionalità	51
4.3.1	Sezione d'urto media	53
4.3.2	Analisi del cammino libero medio	54
4.4	Equazioni elettroniche	56
4.5	Equazione di conservazione della carica	57

4.5.1	Ricombinazione	57
4.5.2	Rateo di ionizzazione	58
4.6	Equazione di moto	58
4.6.1	Scambio di quantità di moto tra elettroni e particelle pesanti , \mathcal{R}	58
4.6.2	Pressione elettronica, p_e	59
4.6.3	Diffusione anomala	59
4.6.4	Analisi dei termini trascurabili	60
4.6.5	Riscrittura dell'equazione	60
4.7	Equazione dell'energia	61
4.7.1	Energia termica media	61
4.7.2	Diffusione della temperatura e conduzione termica . . .	61
4.7.3	Conducibilità termica degli elettroni	62
5	Il Sistema di Coordinate Magnetico	64
5.1	Analisi del campo magnetico	64
5.2	Definizione del passaggio di coordinate	67
5.3	Richiami sui sistemi di coordinate curvilinee	71
6	Definizione del Sistema di Equazioni Risolutivo	74
6.1	Equazioni e parametri adimensionali	76
6.2	Studio della natura matematica del problema	78
6.3	Condizioni iniziali ed al contorno	80
6.3.1	Condizioni al contorno per il Potenziale Elettrico . . .	81
6.3.2	Condizioni al contorno per la Temperatura	84
7	Metodo Numerico	88
7.1	Analisi del dominio computazionale	88
7.2	Metodo ai volumi finiti: "Cartesian Cut-Cell"	89
7.2.1	Metodologia numerica	90
7.2.2	Considerazioni sul metodo	96
7.3	Equazioni in forma integrale	96
7.4	Generazione della griglia	99
7.5	Schema di calcolo	102
III	Risultati e Conclusioni	104
8	Risultati	106
8.1	Validazione del codice	106

8.1.1	Potenziale Elettrico	107
8.1.2	Temperatura	108
8.1.3	Parametro di Hall	109
8.1.4	Rateo di ionizzazione	110
9	Conclusioni	111
9.1	Aspetti caratteristici del codice	111
9.2	Integrazione con un codice PIC	112
9.3	Sviluppi futuri	112
9.3.1	Possibili aggiunte al codice	112
9.3.2	Il campo magnetico	113
9.3.3	Il metodo “Cartesian Cut-Cell”	113
9.3.4	Conoscenza dei dati iniziali	113
9.3.5	Simulazione della parte esterna	114
A	Derivazione delle Equazioni a Singolo Fluido	116
B	Potenziale Termalizzato ed Approcci Alternativi	122
	Bibliografia	124

Elenco delle figure

1.1	Andamento della massa di propellente e del sistema di generazione della potenza al variare dell'impulso specifico	21
1.2	Foto e schema di un resistogetto.	23
1.3	Foto e schema di un arcogetto.	24
1.4	Schema unidimensionale di un motore a ioni	25
1.5	Foto di un motore a bombardamento elettronico.	26
1.6	Schema di propulsore ad effetto di campo	27
1.7	Schema di motore MPD	29
2.1	Configurazione di un propulsore ad effetto Hall	31
2.2	Moto di particelle cariche in campo magnetico	33
2.3	Deriva del centro guida	34
2.4	Deviazione della direzione di deriva degli elettroni dovuta alle collisioni	35
2.5	Corrente azimutale e campo magnetico	36
2.6	Processo accelerativo, rappresentazione vettoriale	37
4.1	Sezione d'urto elettrone-neutro in funzione della temperatura elettronica	55
5.1	Linee di campo magnetico nella zona del canale e del getto . .	65
5.2	Intensità del campo magnetico nel canale, $[T]$	66
5.3	Linee di campo magnetico e coordinate curvilinee associate . .	68
5.4	Linee coordinate μ nel canale accelerativo e direzione di crescita	69
5.5	Linee coordinate λ nel canale accelerativo e direzione di crescita	70
6.1	Densità degli ioni nel canale accelerativo, $[m^{-3}]$	80
6.2	Densità dei neutri nel canale accelerativo, $[m^{-3}]$	81
6.3	Profilo della guaina	82
6.4	Coefficiente di emissione secondario δ_{eff} , potenziale di parete ϕ_w , flusso di calore normalizzato q_w in funzione di T_e $[eV]$. .	85

7.1	Dominio computazionale nel sistema di coordinate magnetico .	88
7.2	Tipica cella Cartesiana 2D	90
7.3	Modifiche preliminari per le celle di confine	92
7.4	Cella trapezoidale e punti interpolanti	93
7.5	Punti interpolanti per i gradienti sul contorno	95
7.6	Griglia Cartesiana sul dominio modificato	100
7.7	Confronto tra contorno reale e contorno modificato	101
7.8	Schema di esecuzione del codice	102
8.1	Potenziale elettrico, $[V]$	107
8.2	Temperatura elettronica, $[eV]$	108
8.3	Parametro di Hall, β_H	109
8.4	Rateo di ionizzazione, $[m^{-3}s^{-1}]$	110
A.1	Diagramma vettoriale di un propulsore ad effetto Hall	119

Elenco delle tabelle

1.1	Δv tipici di missione	19
1.2	Principali parametri dei differenti tipi di motori elettrici	22
2.1	Parametri di riferimento del motore di interesse	38
4.1	Tipi di collisioni in un motore ad effetto Hall	52
4.2	Cammino libero medio per collisioni in un propulsore ad effetto Hall	55

Parte I

Introduzione

Capitolo 1

Propulsione al Plasma

1.1 Concetti base sulla propulsione spaziale

Il principale requisito caratterizzante una missione spaziale è la capacità propulsiva propria del mezzo di cui si dispone. È da questa che dipendono sia operazioni onerose, quali il lancio in orbita del veicolo o la fuga dal campo gravitazionale di un pianeta, sia operazioni in orbita, come il controllo orbitale e di assetto di un satellite. Per comprendere meglio i vantaggi della propulsione elettrica è utile richiamare i concetti base della propulsione.

Il volo di un razzo in un campo gravitazionale è generato come reazione alla quantità di moto trasportata dal propellente espulso dal razzo stesso:

$$M\dot{\mathbf{v}} = \dot{m}\mathbf{u}_e + \mathbf{F}_g \quad (1.1)$$

dove M è la massa istantanea del veicolo, $\dot{\mathbf{v}}$ la sua accelerazione, \dot{m} è il flusso della massa espulsa, \mathbf{u}_e è la velocità di scarico del propellente rispetto al veicolo e \mathbf{F}_g è la forza gravitazionale locale. La massa di propellente da espellere per ottenere la spinta deve essere trasportata a bordo, incrementando così la massa iniziale del veicolo, ovvero riducendo quella del carico utile, a parità di massa complessiva. Il primo termine a destra rappresenta la spinta del razzo e può essere trattato come una forza esterna applicata al propulsore:

$$\mathbf{T} = \dot{m}\mathbf{u}_e \quad (1.2)$$

In condizioni ideali, cioè con velocità di scarico costante u_e e campo gravitazionale nullo, ovvero $F_g = 0$, la (1.1) integrata fra gli istanti di accensione e spegnimento del propulsore fornisce la fondamentale equazione di Tsiolkovsky:

$$\Delta v = u_e \ln \frac{M_0}{M_f} \quad (1.3)$$

dove M_0 e M_f sono rispettivamente la massa iniziale e finale del veicolo e Δv è la variazione di velocità del veicolo in direzione e verso della spinta, ottenuta espellendo la porzione di massa $M = M_0 - M_f$.

Un importante parametro direttamente collegato alla velocità di scarico è l'impulso specifico I_{sp} , tradizionalmente usato per caratterizzare le prestazioni dei propulsori. L'impulso specifico può essere definito come il rapporto tra la spinta prodotta ed il flusso di massa moltiplicato per l'accelerazione di gravità standard terrestre:

$$I_{sp} = \frac{\dot{m}u_e}{\dot{m}g_0} = \frac{u_e}{g_0}$$

in unità MKS la velocità di scarico e l'impulso specifico differiscono per un fattore di circa 10. La (1.3) può essere riscritta introducendo l'impulso specifico nel seguente modo:

$$\Delta v = I_{sp}g_0 \ln \frac{M_0}{M_f}$$

Questa formulazione mette in luce l'importanza dell'impulso specifico nell'ottica di un'ottimizzazione della massa del propellente. Appare chiaro che è necessario provvedere alti I_{sp} per ottenere maggiori risparmi di propellente. Una riduzione nella richiesta di propellente consente, a parità di massa iniziale, di trasportare un maggiore carico pagante, oppure, a parità di missione, di avere una minore massa iniziale e quindi di usare lanciatori più piccoli e meno costosi.

In tabella 1.1 sono elencati tipici valori di Δv , necessari nelle diverse missioni.

TIPO DI MISSIONE	$\Delta v(m/s)$
immissione a bassa quota	100 ÷ 1000
immissione a quota media	2500 ÷ 5000
immissione a quota alta e geosincrona	6600
Terra-Luna	13000
Terra-Luna-Terra	18500
Terra-Marte-Terra	27000
compensazione resistenza aerodinamica	320
EWSK satelliti geostazionari	2/anno
NSSK satelliti geostazionari	50/anno

Tabella 1.1: Δv tipici di missione

1.2 La propulsione elettrica

Il meccanismo fondamentale della *propulsione chimica* è legato alla reazione tra ossidante e carburante ed alla successiva espansione ed accelerazione gasdinamica in un ugello dei prodotti di combustione. I sistemi di propulsione chimica hanno un limite intrinseco al poter sviluppare più elevate velocità di scarico che è dato dall'energia chimica contenuta nella massa di propellente, e un limite tecnologico, che è dato dalle limitazioni alla massima temperatura che è possibile sviluppare in camera di combustione per evitare eccessivi scambi di calore con le pareti e, quindi, il loro cedimento strutturale. Tali limitazioni comportano l'ottenimento di impulsi specifici dell'ordine dei $300 \div 400$ secondi. Questi motori sono particolarmente adatti per il cambiamento di orbita, per il controllo dell'assetto dei veicoli spaziali e dei satelliti, ed in generale per la locomozione a partire da una piattaforma spaziale. Per aumentare notevolmente l'impulso specifico è necessario abbandonare i processi accelerativi di tipo puramente chimico o nucleare ed utilizzare la propulsione elettrica.

R. G. Jahn, in [1], definisce la *propulsione elettrica* come segue:

“...l'accelerazione di un gas per la propulsione mediante riscaldamento elettrico e/o per mezzo di forze di massa elettriche e/o magnetiche.”

Partendo direttamente da questa definizione distinguiamo tre sottoclassi:

1. *Propulsione elettrotermica*
2. *Propulsione elettromagnetica*
3. *Propulsione elettrostatica*

Attualmente la ricerca si concentra su queste ultime due tecnologie, relegando un ruolo di secondo piano alla propulsione elettrotermica per via delle prestazioni di gran lunga inferiori: infatti come la propulsione chimica classica essa è basata su un processo accelerativo di tipo gasdinamico e ne ha in comune le limitazioni principali.

I propulsori elettrici possono produrre velocità di scarico e consentire per i veicoli spaziali frazioni di carico utile di un ordine di grandezza superiore ai più avanzati razzi chimici. Le spinte per unità di area di scarico ottenibili con questi sistemi sono però molto più basse, comportando così tempi di volo più lunghi e traiettorie molto più complesse. Inoltre questi sistemi richiedono la disponibilità di apparati per la generazione di potenza di bassa massa specifica ed alta affidabilità. Pertanto i propulsori elettrici trovano

nello spazio la loro migliore applicazione ogniqualvolta si abbia bisogno di basse spinte funzionanti per periodi di tempo abbastanza lunghi. L'impiego tipico va dal puntamento fine, il sollevamento ed il mantenimento orbitale di satelliti, fino a missioni di trasferimento interplanetario di sonde scientifiche e grossi veicoli spaziali.

La principale limitazione alle prestazioni dei propulsori elettrici riguarda la potenza disponibile. La massa del generatore di potenza (M_P), che deve essere trasportato durante tutta la missione, dà luogo ad un effetto penalizzante; infatti, se la massa di propellente diminuisce all'aumentare dell'impulso specifico, la potenza elettrica necessaria al motore, quindi la massa del generatore di potenza, aumenta.

La massa dell'impianto di potenza può essere assunta proporzionale alla potenza elettrica richiesta P :

$$M_P = \alpha P = \alpha \frac{P_p}{\eta_{el}} = \alpha \frac{T \cdot u_e}{2\eta_{el}} = \alpha \frac{T \cdot I_{sp} \cdot g_0}{2\eta_{el}}$$

dove η_{el} rappresenta il rendimento di spinta del motore, inteso come efficienza di conversione della potenza elettrica in propulsiva, M_P è la massa del generatore di potenza, α è un fattore di proporzionalità e P_p è la potenza propulsiva.

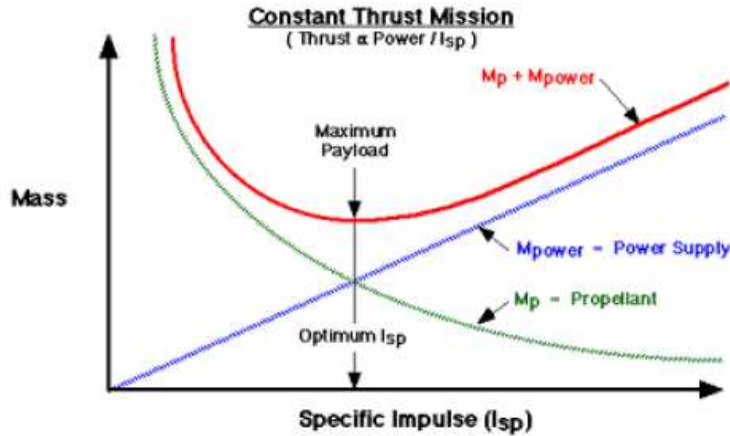


Figura 1.1: Andamento della massa di propellente e del sistema di generazione della potenza al variare dell'impulso specifico

In figura 1.1 è riportato l'andamento della massa globale come somma della massa di propellente M_p e della massa del generatore di potenza M_{power} , in funzione dell'impulso specifico.

Si può osservare che esiste un valore ottimale dell'impulso che minimizza la somma dei pesi. Per impulsi specifici inferiori a tale valore si perde il vantaggio della riduzione di propellente necessario, mentre per valori superiori l'aumento della massa dell'impianto di potenza può divenire fortemente penalizzante. Risulta quindi evidente come non sarà possibile sfruttare pienamente gli elevati impulsi specifici disponibili, fino a quando la tecnologia dei generatori non sarà in grado di fornire dispositivi ad elevata potenza per unità di massa. Un altro aspetto importante dello stesso problema è costituito dal livello di spinta effettivamente disponibile. In effetti la potenza elettrica necessaria risulta:

$$P = \frac{T \cdot I_{sp} \cdot g_0}{2\eta_{el}}.$$

Supponendo assegnata la potenza disponibile e dato l'alto valore dell'impulso specifico, non è possibile ottenere spinte molto elevate. La potenza specifica, definita come il rapporto tra la potenza e la spinta prodotta (P/T), risulta elevata, ovvero dell'ordine di $30 \div 60$ [kW/N]. Per queste ragioni, la propulsione elettrica è ancora impiegata solo per operazioni che richiedono un basso livello di spinta.

In tabella 1.2 sono riportati i parametri caratteristici tipici dei differenti tipi di motori elettrici. Nel seguito analizzeremo tali motori più in dettaglio.

Propulsore	Potenza (W)	Spinta (N)	I_{sp} (sec)	Rendimento
Resistogetto	500-1000	0.3-0.8	300-900	0.5-0.8
Arcogetto	1800-4500	0.25	500-600	0.35
Motore a ioni	450	0.18	2800	0.6
PPT	10-30	0.1-0.4	500-1000	
MPD	1000		1000-5000	0.25

Tabella 1.2: Principali parametri dei differenti tipi di motori elettrici

Propulsione elettrotermica

La propulsione elettrotermica comprende tutte le tecniche per mezzo delle quali il propellente viene riscaldato elettricamente nella camera e successivamente espanso attraverso un opportuno ugello dove l'energia termica viene convertita in energia cinetica. In questa famiglia possono essere distinte tre sottoclassi di propulsore, in base alle modalità di riscaldamento del propellente:

1. *Resistogetti*, nei quali il calore è trasferito al propellente da una superficie solida, come le pareti della camera o una resistenza elettrica.

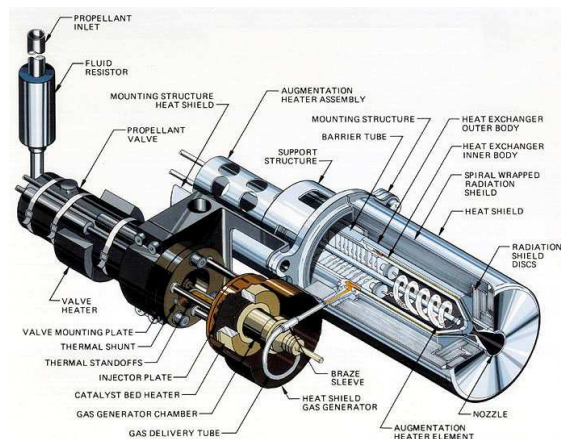


Figura 1.2: Foto e schema di un resistogetto.

2. *Arcogetti*, nei quali il propellente è riscaldato da un arco elettrico che scocca al suo interno.

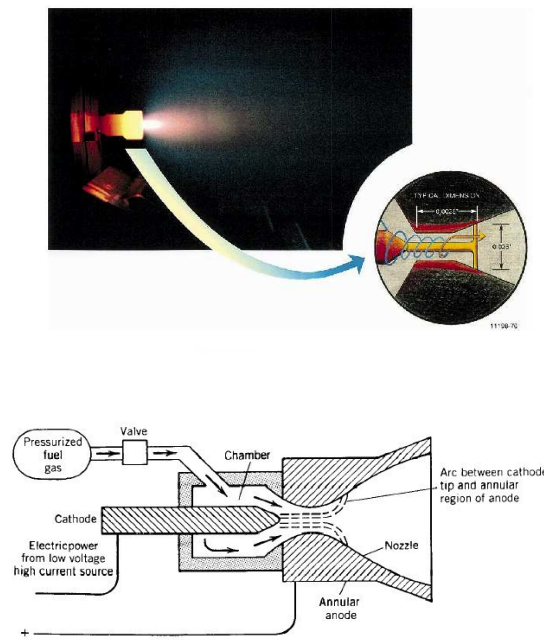


Figura 1.3: Foto e schema di un arcogetto.

3. *A microonde*, nei quali il propellente è riscaldato per mezzo di radiazioni ad alta frequenza.

Ciascuna di queste strategie riduce le limitazioni intrinseche dei razzi chimici nel senso che il tipo di propellente può essere scelto per le sue favorevoli proprietà fisiche indipendentemente dalla chimica della combustione. Tuttavia, i vincoli dati dal trasferimento di calore alle pareti e le perdite del flusso congelato (perdite dovute all'energia non recuperata, "congelata", nei modi interni e nella dissociazione delle molecole) sono presenti anche in questa classe di propulsori. Anche se si sfrutta energia elettrica per fornire energia al fluido, il processo accelerativo è ancora di tipo gasdinamico:

$$v_e \propto \sqrt{2C_p T_c}$$

dove T_c è la massima temperatura tollerabile in camera.

Propulsione elettrostatica

Nei propulsori elettrostatici un fascio di ioni viene accelerato da un appropriato campo elettrico e quindi espulso ad elevata velocità all'esterno del motore, dove viene neutralizzato da un uguale flusso di elettroni.

Con riferimento alla figura 1.4, in cui è rappresentato uno schema unidimensionale, le cariche positive vengono estratte da una sorgente in corrispondenza dell'elettrodo emettitore e vengono accelerate dal campo elettrico che si stabilisce tra quest'ultimo e l'elettrodo acceleratore, il quale è posto a tensione negativa e forato in modo da permettere il passaggio degli ioni accelerati.

Utilizzando il principio di conservazione dell'energia applicato ad uno ione, otteniamo la velocità di scarico:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}}$$

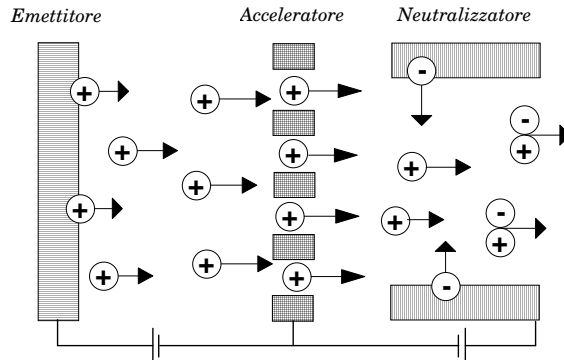


Figura 1.4: Schema unidimensionale di un motore a ioni

Il profilo di potenziale tra emettitore e acceleratore, che sarebbe lineare se tra essi ci fosse il vuoto, viene modificato dalla presenza degli ioni, che rappresentano una distribuzione di carica spaziale. Il numero di ioni emessi per unità di lunghezza della sorgente può al massimo arrivare al valore limite per il quale il campo elettrico su essa si annulla, cioè l'effetto dell'elettrodo acceleratore viene estinto da quello della carica spaziale positiva. Questo rappresenta un limite fondamentale sul flusso degli ioni che può essere estratto in funzione di una data differenza di potenziale, e in pratica limita le prestazioni di questo tipo di motori.

L'interesse per questa categoria di propulsori risiede principalmente nella loro

maturità. Da un punto di vista applicativo solo alcuni tipi di propulsore hanno interesse. La loro distinzione risiede nel differente sistema di produzione di ioni:

- a bombardamento elettronico;
- per contatto superficiale;
- a radiofrequenza;
- a colloide;
- ad emissione di campo.

Nei propulsori a bombardamento elettronico gli ioni positivi sono ottenuti dal bombardamento di un gas propellente, come Xenon, oppure un vapore di metallo liquido, di solito Cesio, da parte di elettroni emessi per effetto termoionico da catodi incandescenti; tali ioni sono successivamente accelerati da un campo di forza elettrostatico generando la spinta.



Figura 1.5: Foto di un motore a bombardamento elettronico.

Nei propulsori a contatto superficiale, il cui uso è stato quasi del tutto abbandonato, gli ioni vengono estratti da un metallo liquido a contatto con un catalizzatore ad alta temperatura.

Nei propulsori a radiofrequenza gli ioni sono creati in una camera di scarica isolante, generalmente quarzo o allumina, attraverso l'eccitazione con radiofrequenze di elettroni liberi. Solitamente vengono utilizzati gas nobili e pesanti come lo Xenon o il Krypton.

Nel propulsore colloidale un liquido conduttore (la glicerina) viene fatto passare attraverso un ago ad elevato valore di potenziale ($5 \div 10$ kV). Un

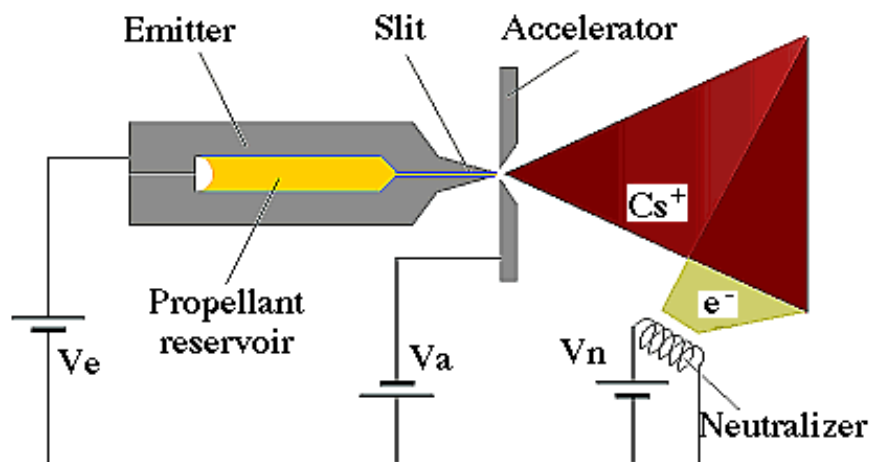


Figura 1.6: Schema di propulsore ad effetto di campo

estrattore delle cariche viene portato ad una tensione molto negativa (dell'ordine di alcuni kV), la differenza di potenziale fa in modo che si formino delle cariche positive in forma di gocce dal menisco del liquido. Le dimensioni delle gocce non sono uniformi ed hanno un basso rapporto massa/carica.

I propulsori ad emissione di campo, meglio conosciuti come FEEP, ovvero "Field Emission Electric Propulsion", possono essere considerati come i propulsori elettrostatici di seconda generazione. In questo tipo di motori, infatti, piccole quantità di propellente liquido sono portate, per capillarità, verso regioni dove un intenso campo elettrico strappa gli ioni dalla superficie del liquido, secondo un meccanismo detto dei coni di Taylor, e quindi li accelera fino ad ottenere velocità di scarico elevate. Questo permette di eliminare la fase intermedia di vaporizzazione del propellente, necessaria invece nelle altre tecniche di ionizzazione e che comporta il consumo di una considerevole frazione della potenza di alimentazione; inoltre semplifica la struttura del sistema che non necessita più di un vaporizzatore, di una camera di ionizzazione e della classica griglia per l'estrazione degli ioni, con una conseguente riduzione di peso e ingombri.

Propulsione elettromagnetica

La propulsione elettromagnetica si basa sull'interazione tra la corrente elettrica che passa in un fluido ionizzato e un campo magnetico presente nella stessa regione. Il fluido conduttore è sottoposto ad un campo elettrico \mathbf{E} e ad un campo magnetico \mathbf{B} perpendicolari tra loro. La corrente \mathbf{j} generata dal campo elettrico interagisce con il campo magnetico dando luogo ad una forza per unità di massa

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

che accelera il fluido lungo il canale. Il fluido di lavoro, sebbene altamente ionizzato, è macroscopicamente neutro, quindi non si hanno vincoli dovuti a limitazioni della carica spaziale come nel caso degli acceleratori elettrostatici.

A differenza dei sistemi elettrotermici ed elettrostatici, che offrono solo poche configurazioni, gli acceleratori elettromagnetici presentano una miriade di possibilità di implementazioni. I campi applicati e le correnti interne possono essere stazionari, pulsati, o alternati su un intervallo di frequenze; il campo \mathbf{B} può essere applicato esternamente e/o indotto dalle correnti che scorrono nel plasma; si possono usare una grande varietà di propellenti, inoltre si può variare la geometria degli elettrodi, la forma del canale, i mezzi di iniezione, i sistemi di ionizzazione e i modi di rilascio della potenza elettrica. I propulsori più avanzati di questa categoria sono:

- *propulsori magnetoplasmadinamici (MPD)*: il propellente fluisce nello spazio tra gli elettrodi e viene ionizzato dalla scarica di corrente che si instaura tra anodo e catodo; nel canale è presente un campo magnetico che può essere completamente autoindotto o anche applicato dall'esterno; l'interazione tra corrente e campo magnetico produce una forza di massa che accelera il fluido fornendo la spinta; una ulteriore distinzione si ha in base al funzionamento stazionario e pulsato.
- *propulsori ad effetto Hall (HET)*: lo schema di funzionamento ed i principi fisici caratteristici di un motore ad effetto Hall, vengono presentati in dettaglio nel successivo capitolo, in quanto oggetto del presente lavoro.

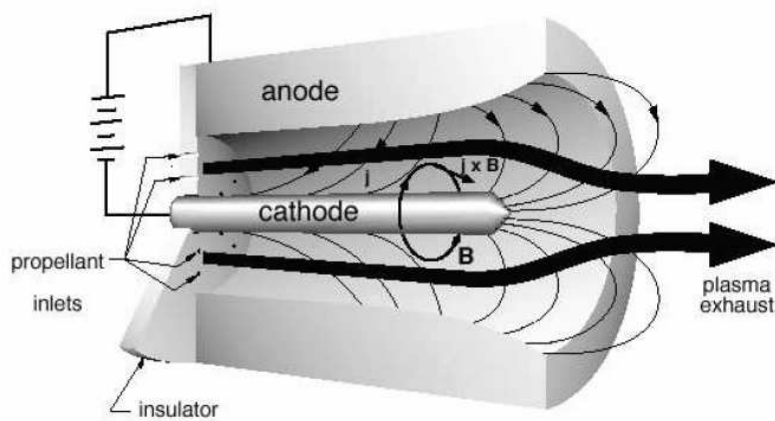


Figura 1.7: Schema di motore MPD

Capitolo 2

Propulsori ad Effetto Hall

2.1 Richiami storici

Lo studio dei Propulsori ad Effetto Hall (HET), iniziò indipendentemente in Russia e negli Stati Uniti nei primi anni '60. Negli U.S.A. gli sforzi compiuti sugli HET furono minori rispetto all'ex Unione Sovietica, e furono interrotti intorno al 1970 a seguito dei maggiori risultati ottenuti sui motori a ioni. Al contrario, in Russia si arrivò, a partire dal primo motore progettato da A. I. Morozov, al primo test di volo completato con successo nel 1972. Per oltre dieci anni i satelliti russi hanno usato gli HET per operazioni quali il mantenimento orbitale e le manovre in orbita, ma, nonostante una storia pluridecennale di ricerca e sviluppo, la fisica degli HET non è ancora del tutto compresa. In occidente l'interesse verso i motori ad effetto Hall è cresciuto rapidamente negli anni '90, col rapido sviluppo dei satelliti commerciali. Oggigiorno il campo di ricerca degli HET varia da spinte molto alte fino a spinte microscopiche, investendo tutti gli aspetti della ricerca, dalla sperimentazione alla modellizzazione numerica.

2.2 Schema generale di un motore ad effetto Hall

La figura 2.1 mostra lo schema generale di un propulsore ad effetto Hall. Sebbene siano stati messi a punto con successo diversi motori con grandezza e livelli di potenza differenti, tutti presentano la stessa configurazione geometrica.

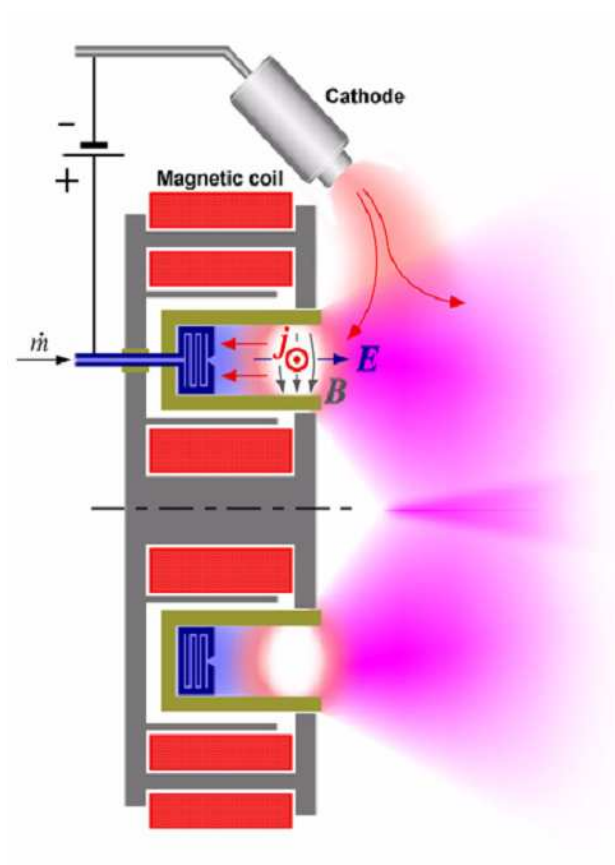


Figura 2.1: Configurazione di un propulsore ad effetto Hall

Essenzialmente il motore si presenta come un sistema anodo-catodo, con una camera ad anello le cui pareti sono fatte di Nitruro di Boro, immerse in una struttura di supporto in acciaio, nella quale ha luogo la ionizzazione ed il processo accelerativo. Il canale è circondato da un avvolgimento magnetico che genera un campo assialsimmetrico che, grazie a schermi ferro-magnetici, presenta una componente radiale molto forte ed una componente assiale, non utile nel processo accelerativo, molto piccola. L'anodo si presenta come un disco toroidale in acciaio dal quale viene immesso il propellente attraverso una serie di fori distribuiti circonferenzialmente. Generalmente, il propellente usato è Xenon, essenzialmente per due motivi:

- ha bassa energia di prima ionizzazione ($E_{ion} = 12.13 \text{ [eV]}$) ed elevato numero atomico (131),
- è un gas inerte, per cui le contaminazioni sono minime.

Gli elettroni sono emessi dal catodo ed attratti dall'anodo all'interno del canale. In realtà la posizione del catodo rompe la simmetria assiale del motore, ma, poichè gli elettroni vengono immessi in una zona in cui il profilo di potenziale ha una pendenza molto dolce (è essenzialmente nullo ovunque), il punto di iniezione è ininfluenza per la valutazione delle prestazioni.

Di seguito mostreremo i principi fisici basilari e la generazione di spinta del motore.

2.3 Moto delle particelle e parametro di Hall

Analizziamo il moto di una particella carica in presenza di campo elettrico e magnetico. La fisica classica mostra che il moto di una particella carica, soggetta solamente all'azione del campo magnetico, è un moto circolare uniforme nel piano perpendicolare alle linee di campo. In questo caso introduciamo una frequenza caratteristica (detta “frequenza di ciclotrone”) definita come:

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (2.1)$$

Il raggio dell'orbita circolare è detto “Raggio di Larmor” e vale semplicemente:

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (2.2)$$

dove v_{\perp} è la velocità ortogonale alle linee di campo. Gli ioni ciclano in senso antiorario, gli elettroni in senso orario (figura 2.2).

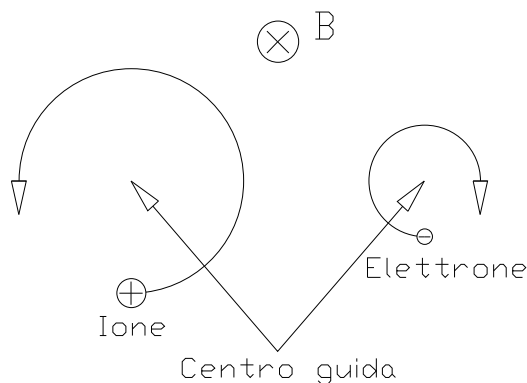


Figura 2.2: Moto di particelle cariche in campo magnetico

Consideriamo ora il caso in cui vi sia un campo elettrico \mathbf{E} ortogonale a \mathbf{B} . Quando uno ione si muove in direzione del campo elettrico, viene accelerato ed il suo raggio di Larmor cresce; quando si muove in direzione opposta al campo elettrico il suo raggio di Larmor decresce. Il risultato complessivo è che lo ione segue un moto cicloidale, con centro guida che deriva in direzione perpendicolare sia ad \mathbf{E} che a \mathbf{B} come mostrato in figura 2.3. Anche gli elettroni derivano ma con raggio di Larmor minore poichè hanno una massa più piccola.

Si possono notare le seguenti caratteristiche generali:

- elettroni e ioni derivano nella stessa direzione $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$: l'elettrone, infatti, ha carica opposta, ma gira in senso opposto a quello degli ioni;
- la velocità di deriva per elettroni e ioni è la stessa; gli elettroni hanno una deriva minore per ciclo, ma eseguono più cicli per unità di tempo.

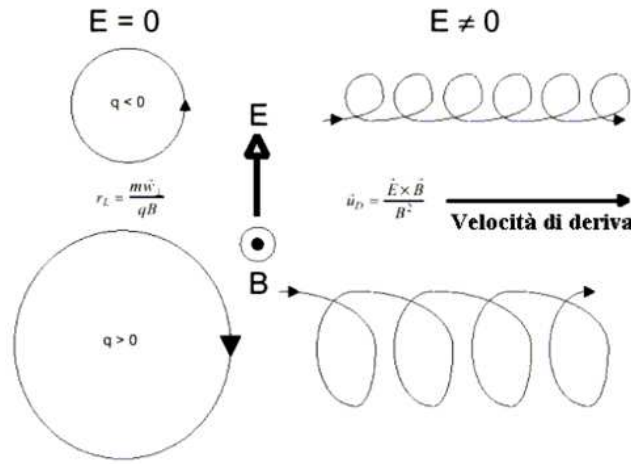


Figura 2.3: Deriva del centro guida

Il comportamento di un insieme di particelle può essere descritto dall'equazione di Boltzmann. Di solito si considera il comportamento medio dei vari componenti del mezzo di lavoro, prendendo i primi tre momenti dell'equazione di Boltzmann ed ottenendo le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia per ogni specie. Tali equazioni, dette equazioni di fluido, insieme alle equazioni di Maxwell ed alle appropriate equazioni costitutive, ci permettono di descrivere il comportamento del mezzo in termini dei suoi componenti. Un'analisi più approfondita delle equazioni di fluido è presentata in appendice A.

Un'analisi semplificata mostra che anche in presenza di un flusso globale una particella ha una deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Le collisioni tra particelle causano una diffusione prevalentemente in direzione di \mathbf{E} ; questo perchè si suppone che ad ogni collisione la particella si fermi e poi sia nuovamente accelerata dal campo elettrico.

La figura 2.4 mostra la direzione di deriva modificata dagli eventi collisionali. L'angolo ϑ è una funzione delle frequenze collisionale (ν) e ciclotronica (ω_c) secondo la seguente espressione:

$$\beta_H = \tan \vartheta = \frac{\omega_c}{\nu} \quad (2.3)$$

β_H è il “Parametro di Hall” ed è una misura del comportamento collisionale del plasma.

Come derivato in appendice A e in [11], l’equazione di moto risultante per le due specie che costituiscono il plasma è:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.4)$$

dove tutti i contributi elettro-magnetici si riducono alla ben nota forza di Lorenz (eccetto per un contributo dovuto al gradiente della pressione), anche se occorre ricordare che tale termine è il risultato dell’effetto combinato delle collisioni e del campo elettrico auto-consistente.

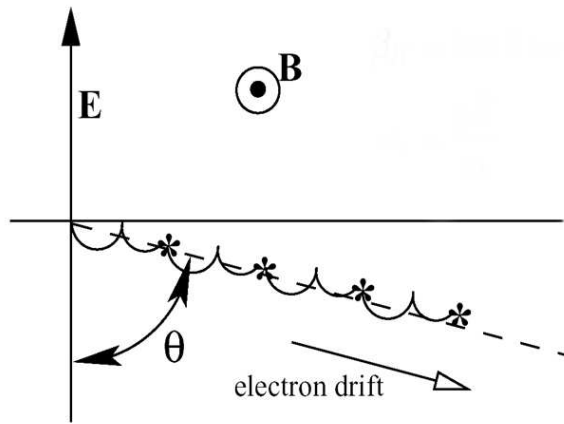


Figura 2.4: Deviazione della direzione di deriva degli elettroni dovuta alle collisioni

2.4 Processo accelerativo e generazione della spinta

Le figure 2.5 e 2.6 mostrano i principi operativi di un Propulsore ad Effetto Hall.

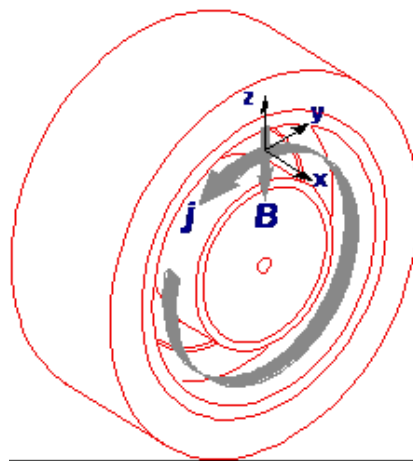


Figura 2.5: Corrente azimutale e campo magnetico

Come mostrato in figura, il principio accelerativo di un HET è basato su una significativa diminuzione della mobilità assiale degli elettroni all'ingresso del canale, dovuta al forte campo magnetico radiale che forza gli elettroni a derivare in direzione azimutale mentre cercano di raggiungere l'anodo. In condizioni operative normali il parametro di Hall è tanto grande da poter considerare il moto elettronico come una deriva libera azimutale. Come conseguenza, in prossimità del canale si crea una forte caduta di potenziale che forza gli ioni, che non sono magnetizzati e quindi sono liberi di muoversi lungo il canale, ad accelerare lungo il gradiente di potenziale fino ad alte velocità (nell'ordine di 20.0 [km/s] , molto più alte dei classici motori chimici). Il processo è innescato da una piccola frazione di elettroni emessi dal catodo, ma la maggior parte della corrente elettronica è dovuta agli elettroni prodotti dalla ionizzazione del gas. Una quantità equivalente di elettroni rappresenta il rimanente flusso catodico che provvede alla neutralizzazione del flusso ionico all'esterno del canale. In questo tipo di motori il processo accelerativo è essenzialmente elettrostatico: la spinta è interamente attribuibile al campo elettrico auto-consistente generato all'interno del plasma.

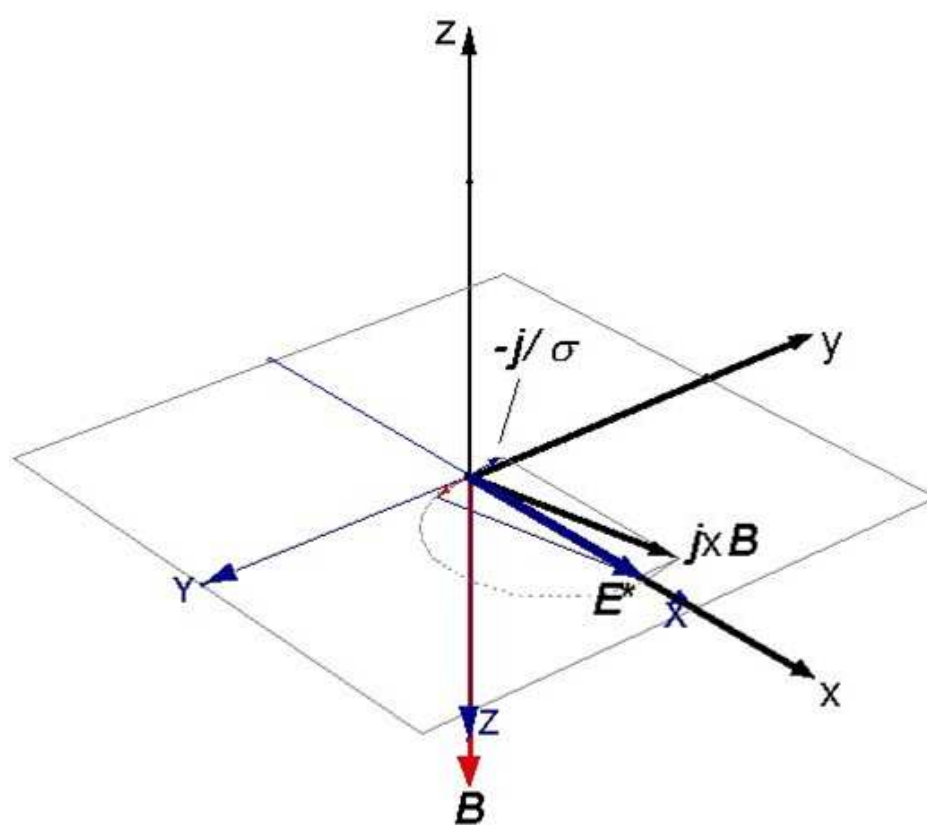


Figura 2.6: Processo accelerativo, rappresentazione vettoriale

La tabella 2.1 riporta alcuni parametri di progetto del motore analizzato nel presente lavoro.

Impulso Specifico	$\sim 1600 \text{ s}$
Rendimento	$\sim 37.0\%$
Spinta	$\sim 70.0 \text{ mN}$
Portata	4.7 mg/s
Corrente	3.81 A
Voltaggio	350 V
Potenza	1.33 kW
Campo Magnetico (max.)	$1.35 \times 10^{-2} \text{ T}$
Vita Operativa	$\sim 8,000 \text{ h}$

Tabella 2.1: Parametri di riferimento del motore di interesse

Capitolo 3

Motivazioni ed Obiettivi dell'Analisi

3.1 Definizione del problema tecnico

Nonostante anni di sviluppo, i motori ad effetto Hall sono ancora poco compresi. Sono progettati secondo assunzioni generali sull'energia di scarica, sull'influenza del campo magnetico e sui metodi di trasporto elettronico. Sfortunatamente, misure della scarica sono difficili da ottenere e vanno interpretate basandosi sulle medesime assunzioni. Pertanto, si rende necessario un modello numerico del canale accelerativo che sia in grado di convalidare e raffinare tali assunzioni. Inoltre tale modello può essere utile per predire l'erosione delle pareti della camera, la quale rappresenta il meccanismo principale che limita la vita operativa del motore.

3.2 Stato della ricerca numerica sui motori ad effetto Hall

Dall'avvento dei primi motori, a causa delle ristrette capacità di calcolo, negli anni '70 gli HET sono stati oggetto di un'intensa attività sperimentale sia in U.S.A. che in Russia. Tuttavia, mentre forti oscillazioni del plasma portarono all'abbandono delle ricerche in U.S.A., gli esperimenti russi si ritrovano nei molti articoli di Morozov, Bugrova, Smirnov, Bishaev, Esipchuk, e Zubkov per citarne alcuni.

Negli anni '90 ricerche numeriche portate avanti negli U.S.A. hanno condotto ad importanti risultati. Nel 1992, Lentz [12] fece uso di un modello numerico 1-D per predire con accuratezza le caratteristiche operative ed i parametri

del plasma nella zona accelerativa di un HET costruito in Giappone.

Le assunzioni di Lentz comprendevano quasi-neutralità, diffusione alla Bohm attraverso il campo magnetico e rapporto costante tra perdite energetiche per ionizzazione e perdite energetiche elettroniche totali.

Nel 1995, Fife [13] pose una pietra miliare per la ricerca numerica, estendendo il lavoro di Lentz alle due dimensioni (r, z) . Tale modello assumeva quasi-neutralità, distribuzione degli elettroni Maxwelliana e diffusione di Bohm attraverso linee di campo magnetico. Le particelle pesanti venivano simulate direttamente con un metodo “Particle-In-Cell” (PIC), mentre gli elettroni erano modellizzati come un fluido continuo. La temperatura elettronica era ricavata utilizzando l’equazione energetica degli elettroni, mentre il campo elettrico era determinato utilizzando una Legge di Ohm generalizzata.

I risultati indicavano un buon accordo con i dati sperimentali di un SPT-100, predicendo accuratamente fenomeni quali il rateo di erosione alle pareti, la spinta, la potenza ed il rendimento. Le distribuzioni del plasma erano simili a quelle sperimentali, ma non in tutti i casi; in particolare il modello era affetto da una eccessiva predizione, di un fattore due, del picco di temperatura elettronica.

Nel suo lavoro più recente, del 1998, Fife [14] ha sviluppato ulteriormente il suo modello, introducendo un modello di interazione con le pareti più dettagliato, una conducibilità vicino alle pareti dovuta all’emissione degli elettroni secondari ed anche ionizzazione di secondo grado.

3.3 Sviluppo del modello di riferimento

J.J. Szabo [15], J.M. Fife [14], L.Garrigues [16], hanno presentato negli ultimi anni degli eccellenti modelli numerici che descrivono il flusso di plasma in un HET. Nonostante un complessivo accordo con i risultati sperimentali per la maggior parte di questi modelli, alcuni di essi sono affetti da discrepanze locali con quanto osservato nella realtà.

Il modello sviluppato e presentato in questo lavoro è direttamente ispirato ad un lavoro di tesi precedentemente fatto presso il CentroSpazio, [17]. Ritenendo che le incongruenze dei modelli sopracitati derivassero da eccessive assunzioni semplificative, in tale tesi è stato sviluppato un modello completamente bidimensionale, utilizzando le equazioni di fluido per lo studio degli elettroni, ed un codice PIC per lo studio delle particelle pesanti.

I risultati ottenuti incoraggiano a sviluppare ulteriormente un modello completamente 2D, cercando di migliorare lo studio delle equazioni di fluido ed il metodo numerico, soprattutto nell’imposizione delle condizioni al contorno.

3.4 Obiettivi dello studio

Il presente lavoro tratta unicamente il comportamento degli elettroni. L'approccio completamente bidimensionale risulta, indubbiamente, più complesso da implementare, ma la convinzione è che possa essere utile per una maggiore comprensione del comportamento dei propulsori ad effetto Hall. Nel seguito verranno presentati gli aspetti peculiari del metodo, che lo differenziano dagli altri presenti in letteratura, e le assunzioni fisiche che ne stanno alla base.

Nel capitolo 4 vengono presentate le equazioni di fluido per gli elettroni. Il capitolo 5 presenta il passaggio a coordinate magnetiche. I capitoli 6 e 7 descrivono lo studio del modello analitico ed il sistema numerico implementato per la soluzione del problema. Infine gli ultimi due capitoli espongono i risultati della simulazione e le considerazioni derivanti.

Parte II

Moto degli Elettroni

Capitolo 4

Descrizione del Modello Fluido

4.1 Approssimazione 2D-3V

Sebbene i propulsori ad effetto Hall abbiano una geometria cilindrica tridimensionale assialsimmetrica, in diverse pubblicazioni sono riportate variazioni azimutali del campo magnetico, dell'erosione alle pareti e, di conseguenza, delle proprietà dinamiche locali del getto. Inoltre, è stato teorizzato che onde azimutali possano contribuire alla diffusione assiale anomala degli elettroni, [2], [3].

Nell'intento di creare un modello che descriva unicamente i fenomeni di larga scala, nella simulazione non vengono presi in esame gradienti in direzione ϑ . Teniamo conto degli effetti delle onde azimutali modificando le equazioni classiche di trasporto per includere la diffusione di Bohm. Tali considerazioni riducono il problema ad un modello 2D-3V, dove non è possibile ignorare la velocità azimutale.

Il sistema di riferimento principale assunto è il classico sistema di coordinate cilindriche:

$$[r \quad \vartheta \quad z]$$

4.2 Principali assunzioni fisiche

La nostra simulazione studia solamente il comportamento degli elettroni, descritto tramite le equazioni di fluido; ulteriori sviluppi del codice dovranno integrare lo studio delle particelle pesanti, ioni e neutri, preferibilmente utilizzando un codice PIC (“Particle in Cell”).

Le assunzioni derivano tutte dalla teoria classica della fisica dei plasmi; i principali riferimenti sono [2],[3],[4].

4.2.1 Quasi neutralità

Un plasma può essere definito come “una miscela quasi neutra di particelle cariche e neutre che mostrano un comportamento collettivo”, [3]. Questo significa essenzialmente che, prima di tutto, entro una lunghezza caratteristica il plasma è neutro anche se sottoposto ad un potenziale elettrico, e secondariamente che il moto non dipende solo da condizioni locali, ma anche dallo stato del plasma in regioni lontane.

La quantità λ_D , chiamata lunghezza di Debye, è una misura della distanza di schermatura o dello spessore della guaina all'esterno della quale ogni squilibrio di carica non ha effetto.

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e q^2}}$$

La lunghezza di Debye gioca un ruolo importante nella fisica dei plasmi:

- scherma le interazioni Coulombiane
- è un parametro fondamentale che governa le interazioni tra parete e plasma (“guaine”)
- determina il comportamento generale delle sonde nel plasma
- le onde elettroniche sono smorzate per lunghezze d'onda comparabili con λ_D
- influenza molti altri fenomeni come lo *scattering* della luce generata da un L.A.S.E.R.

La tipica lunghezza di Debye per un motore a effetto Hall è compresa tra 0.02 mm vicino all'anodo e 0.1 mm in alcune zone del getto. Tali valori sono molto più piccoli della risoluzione spaziale che si vuole ottenere, quindi assumeremo il plasma quasi neutro ovunque, e ignoreremo l'equazione di Poisson per il campo elettrico.

Per la nostra simulazione useremo dati ricavati in letteratura indicanti tipici valori per la densità ionica e conseguentemente:

$$n_i = n_e \tag{4.1}$$

4.2.2 Momenti di una distribuzione di particelle

Vogliamo calcolare quantità di moto e temperatura degli elettroni come funzione della posizione.

Richiamiamo brevemente alcuni degli aspetti più importanti della Teoria Cinetica Classica dei Plasmi, [2].

La probabilità di trovare una particella in un volume unitario definito nello spazio ordinario e nello spazio delle velocità, centrato in \mathbf{r} e \mathbf{v} rispettivamente, a un tempo t , può essere rappresentata da una funzione \hat{f} :

$$\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} \quad (4.2)$$

Il valore medio di una generica variabile $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ si esprime come segue:

$$\overline{g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)} = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.3)$$

L'espressione integrale precedente è chiamata *momento di ordine n rispetto a \mathbf{v}* quando $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v}^n$. In particolare useremo le equazioni di momento di primo e di secondo ordine.

Momento di primo ordine

La velocità media degli elettroni è:

$$\overline{v(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int v(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.4)$$

La velocità media moltiplicata per la densità numerica ci fornisce il flusso di particelle, $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = n\overline{\mathbf{v}} = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.5)$$

e conseguentemente la densità di corrente, \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = qn\overline{\mathbf{v}} = q\mathbf{\Gamma} \quad (4.6)$$

Momento di secondo ordine

Il momento di secondo ordine, centrato sulla velocità media, fornisce il *Tensore Cinetico degli Sforzi*, detto anche Tensore di Pressione.

$$\overline{\overline{P}}(\mathbf{r}, t) = m \int (\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}})(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.7)$$

Definiamo ora:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}} \quad (4.8)$$

come velocità termica casuale, essendo $\bar{\mathbf{v}}$ la velocità di deriva media, e il suo relativo tensore:

$$v_r v_r = \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix}$$

Tale tensore è ovviamente simmetrico, quindi $\bar{\bar{P}}$ ha solo 6 componenti indipendenti:

$$P_{i,j} = m \int v_{r,i} v_{r,j} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = mn \overline{v_{r,i} v_{r,j}} \quad (4.9)$$

Supponendo che f sia isotropa, in un sistema di riferimento caratterizzato da una velocità di deriva media $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, si avrà:

$$\begin{aligned} \overline{v_{r,i} v_{r,j}} &= 0 & i &\neq j \\ \overline{v_{r,i} v_{r,j}} &= \bar{v}_r^2 / 3 & i &= j \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} nm \bar{v}_r^2 / 3 & 0 & 0 \\ 0 & nm \bar{v}_r^2 / 3 & 0 \\ 0 & 0 & nm \bar{v}_r^2 / 3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

I termini non nulli nel tensore precedente sono effettivamente termini di pressione e rappresentano la quantità di moto trasferita lungo le direzioni principali.

Richiamiamo la definizione di *Velocità Termica Quadratica Media*, che gioca un ruolo importante in vari fenomeni collegati ai gas rarefatti :

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v_r^2}} \quad (4.11)$$

L'energia cinetica media è data da:

$$\overline{E_r} = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m v_r^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (4.12)$$

ed è quindi direttamente correlata alla pressione, essendo:

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E_r} \quad (4.13)$$

L'energia cinetica delle particelle può inoltre essere derivata dal momento di secondo ordine della funzione di distribuzione della velocità.

4.2.3 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Si dimostra che i gas in equilibrio termico obbediscono ad una *Funzione di distribuzione Maxwelliana* nello spazio delle velocità.

In un'analisi unidimensionale tale funzione si indica come:

$$f_M(v) = A \exp\left(-\frac{mv^2/2}{kT_e}\right) \quad (4.14)$$

Ricordando che la densità numerica si ottiene tramite il momento di ordine zero della distribuzione di probabilità, e normalizzando l'integrale, f_M diviene:

$$f_M(v) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT_e}} \exp\left(-\frac{mv^2/2}{kT_e}\right) = \frac{n}{\sqrt{\pi}v_{th}} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{th}^2}\right) \quad (4.15)$$

con la *Velocità Termica* così definita:

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \quad (4.16)$$

Estendendo questa analisi alle tre dimensioni si trova:

$$f_M(\mathbf{v}) = \frac{n}{(\sqrt{\pi}v_{th})^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{v_{th}^2}\right) \quad (4.17)$$

Di seguito presentiamo alcune velocità caratteristiche:

$$v_{rms,M} = \sqrt{\frac{3kT_e}{m}} \quad (4.18)$$

$$\overline{v_M} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}} \quad (4.19)$$

$$\overline{|v_x|_M} = \sqrt{\frac{2kT_e}{\pi m}} \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{random,M} = \frac{1}{2}n\overline{|v_x|_M} = \frac{1}{4}n\overline{v_M} \quad (4.21)$$

L'espressione (4.21) rappresenta il flusso di particelle attraverso una generica superficie virtuale lungo la direzione x.

Riscriviamo l'equazione (4.12) utilizzando una distribuzione di velocità Maxwelliana:

$$\overline{E_r} \equiv E_{av} = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}mv^2 \exp\left(-\frac{v^2}{v_{th}^2}\right) d\mathbf{v} \quad (4.22)$$

Ricordando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \exp(-av^2) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

possiamo semplificare, ottenendo:

$$E_{av} = \frac{1}{4} m v_{th}^2 = \frac{1}{2} k T_e \quad (4.23)$$

Il precedente risultato può essere esteso alle tre dimensioni:

$$E_{av} = \frac{3}{2} k T_e \quad (4.24)$$

Ciò dimostra chiaramente il ben noto risultato che un plasma possiede un'energia cinetica pari a $\frac{1}{2} k T_e$ per ogni grado di libertà.

Il risultato dell'equazione (4.24) sarà fondamentale per trattare alcuni termini nell'equazione dell'energia (sezione 4.7).

Possiamo ottenere un'ulteriore risultato richiamando le equazioni (4.13) e (4.24):

$$p = n k T_e \quad (4.25)$$

che sarà usata sia nell'equazione della quantità di moto, sia in quella dell'energia.

4.3 Collisionalità

Gli elettroni acquistano e perdono energia attraverso collisioni elastiche ed inelastiche con le altre particelle. Un'analisi del cammino libero medio ci aiuterà a decidere quali collisioni includere nella simulazione e quali ignorare; i risultati sono mostrati nella sezione 4.3.2

La tabella 4.1 elenca i principali tipi di collisioni che coinvolgono gli elettroni e quelli ritenuti significativi per la simulazione. Le considerazioni relative ai tipi di interazione elencati sono contenute nelle sezioni dedicate alle equazioni per le quali tali termini sono significativi.

Il rateo di reazione tra due specie può essere espresso in funzione della loro densità, (n_1, n_2) per esempio, delle velocità relative (v_{12}) e della sezione d'urto Q_{12} :

$$R_{12} = n_1 n_2 v_{12} Q_{12} \quad (4.26)$$

Quindi, la frequenza con la quale una tipica particella di specie 1 interagisce con uno sfondo di specie 2 è

$$\nu_{12} = \frac{R_{12}}{n_1} = n_2 v_{12} Q_{12} \quad (4.27)$$

Il cammino libero medio λ_{12} rappresenta la distanza coperta da una particella di specie 1 tra due interazioni consecutive con una particella di specie 2.

Ci sono tre approssimazioni interessanti:

$$v_1 \gg v_2 \Rightarrow \lambda_{12} = \frac{v_1}{\nu_{12}} \simeq \frac{v_1}{n_2 v_1 Q_{12}} = \frac{1}{Q_{12} n_2} \quad (4.28)$$

$$v_1 \simeq v_2 \Rightarrow \lambda_{12} \simeq \frac{1}{Q_{12} n_2} \quad (4.29)$$

$$v_2 \gg v_1 \Rightarrow \lambda_{12} = \frac{v_1}{\nu_{12}} \simeq \frac{v_1}{n_2 v_2 Q_{12}} \quad (4.30)$$

Il numero di Knudsen è una misura del grado di rarefazione di un gas. Solitamente è definito come un rapporto tra il cammino libero medio e una lunghezza caratteristica del sistema fisico :

$$Kn = \frac{\lambda_{12}}{L} \quad (4.31)$$

Tradizionalmente si assumono le equazioni di Navier-Stokes valide per $Kn < 0.1$. Poichè le nostre dimensioni di riferimento hanno lo stesso ordine di grandezza, la scelta di una dimensione caratteristica per la definizione di Kn è ininfluente (altezza o lunghezza del canale per esempio), mentre in alcune circostanze (come nei sistemi dove non c'è una vera lunghezza di riferimento) definire il numero di Knudsen può essere ingannevole. Come regola empirica, L deve essere la scala di grandezza dei gradienti macroscopici. Se $Kn > 0.1$ le equazioni di Navier-Stokes perdono validità, se $Kn > 0.2$ bisogna usare un modello molecolare invece del modello continuo. Per $Kn \rightarrow \infty$ si applica ovunque l'equazione non collisionale di Boltzmann, mentre nel limite $Kn \rightarrow 0$ le equazioni di Navier-Stokes si riducono all'equazione non viscosa di Eulero.

Tipo	Incluso (s/n)
Elettrone-Neutro Deviazione Elastica	S
Elettrone-Neutro Ionizzazione	S
Elettrone-Neutro Eccitazione	S
Elettrone-Elettrone Coulomb	N
Elettrone-Ione Coulomb	N
Elettrone-Ione Ricombinazione	N
Elettrone-Ione Ricombinazione alla Parete	N

Tabella 4.1: Tipi di collisioni in un motore ad effetto Hall

Ignoreremo ogni evento collisionale con un cammino libero medio dell'ordine del cammino che ci aspettiamo percorra la particella prima di lasciare il dominio computazionale; ciò è in buon accordo con molti modelli già sperimentati ([14],[15],[16]) ed è dimostrato che non influenza i principali risultati della simulazione.

Non si può ignorare che, anche dopo molta attività sperimentale, le sezioni d'urto siano conosciute, in funzione della temperatura, solo con molta incertezza.

4.3.1 Sezione d'urto media

Le Sezioni d'Urto Medie (Q , solitamente) rappresentano quante collisioni di un certo tipo ci sono ogni s per mm^3 . Sono essenzialmente funzioni unicamente della temperatura locale; una serie di risultati di alcuni autori è presentata da Szabo [15], insieme a un'interpolazione polinomiale delle curve sperimentali. Le nostre assunzioni sono direttamente ispirate alla sua analisi. Un ragionevole punto d'inizio, in accordo con molti autori, è assumere che gli elettroni abbiano interazioni significative di ionizzazione, scambio di quantità di moto e di energia, solo con i neutri, mentre gli ioni possono essere considerati non collisionali, data la piccola densità.

La sezione d'urto totale per tutti gli urti elettrone-neutro è la somma della sezione d'urto per urti elastici ed eccitazione (raggruppati nella simulazione in Q_s) e per ionizzazione (Q_i):

$$Q_t = Q_s + Q_i \quad (4.32)$$

Le prime misurazioni delle sezioni d'urto effettuate da Ramsauer e Kollath hanno mostrato che la sezione d'urto totale per urti elettrone-neutro, Q_t , è circa $1 \div 4 \times 10^{-15} [cm^2]$ per la maggior parte delle energie di interesse. Poichè la densità dei neutri che eccitano l'anodo è circa $5 \times 10^{14} [cm^{-3}]$, un'analisi del cammino libero medio degli elettroni fornisce un risultato di circa $1.0 [cm]$; tale valore è dello stesso ordine della grandezza caratteristica della regione di simulazione, cosicchè, potremmo essere tentati di ignorare tali collisioni. Tuttavia gli elettroni sono magnetizzati: spiraleggiano lungo le linee di campo magnetico e derivano lungo l'asse del motore, perciò la lunghezza totale del cammino che percorre un elettrone nel muoversi dal catodo all'anodo è molto più grande del cammino libero medio. Infatti così deve essere affinché il motore operi efficientemente. Gli ioni sono prodotti attraverso urti inelastici, la cui sezione d'urto rappresenta solo una parte della sezione d'urto totale. Quindi il modello deve considerare collisioni elettrone-neutro.

Szabo, [15], riporta interpolazioni polinomiali per Q_t e Q_i come funzioni dell'energia degli elettroni.

Sezione d'Urto Mediata con la Temperatura

Abbiamo assunto nella sezione 4.2.3 che la distribuzione degli elettroni sia isotropa e Maxwelliana; questo ci permette di integrare attraverso la distribuzione per trovare la sezione d'urto equivalente in funzione della temperatura, T_e .

$$Q(T_e) = \int Q(e) f(e) de \quad (4.33)$$

Se energia e temperatura sono entrambe espresse in electron Volts, troviamo:

$$f(e) = \frac{dN/N}{de} = \frac{2.0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{e}{T^3}} \exp\left(-\frac{e}{T_e}\right) \quad (4.34)$$

L'integrazione deve essere effettuata numericamente. Per ogni valore della temperatura, sommiamo attraverso 3000 bande energetiche di ampiezza uniforme $\Delta e_i = 20 \times T/3000$ in modo tale da considerare tutti gli elettroni fino a 20 volte la temperatura di riferimento:

$$Q(T_e) = \sum_i Q_i(e_i) f(e_i, T_e) \Delta e_i \quad (4.35)$$

Per ogni banda energetica di ampiezza Δe_i centrata in e_i , otteniamo $Q(e_i)$ dall'interpolazione polinomiale presentata sopra.

I risultati dell'integrazione sono mostrati in figura 4.1.

4.3.2 Analisi del cammino libero medio

L'equazione (4.28) con la sezione d'urto media mostrata sopra, ci permette di approssimare valori del cammino libero medio per diversi fenomeni collisionali.

Assumendo una tipica densità dei neutri di $1.0 \times 10^{19} [m^{-3}]$ e una temperatura elettronica di $12 [eV]$, otteniamo i risultati mostrati in tabella 4.2. Ciò giustifica le assunzioni fatte nella sezione 4.3; la lunghezza di alcuni cammini liberi può sembrare grande se confrontata con le tipiche scale geometriche, ma non dobbiamo dimenticarci che gli elettroni derivano in direzione azimutale molte volte prima di raggiungere l'anodo.

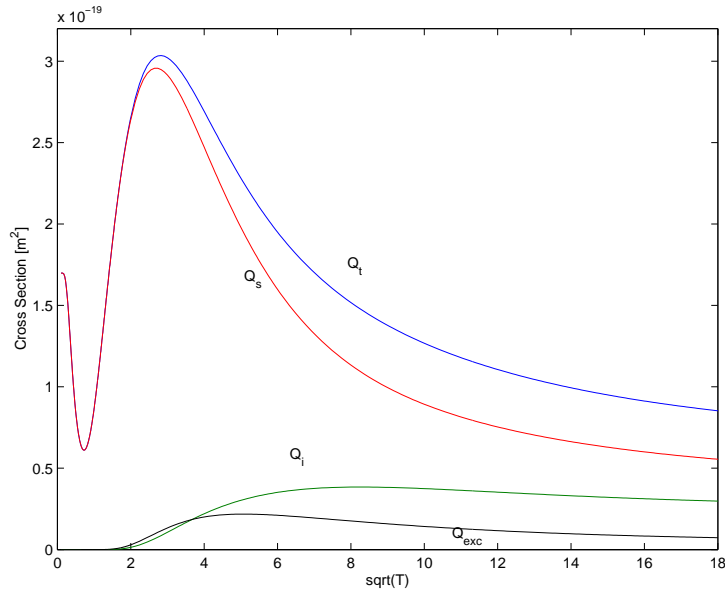


Figura 4.1: Sezione d'urto elettrone-neutro in funzione della temperatura elettronica

Tipo	Cammino Libero Medio [m]
Elettrone-Neutro Deviazione Elastica	0.4
Elettrone-Neutro Ionizzazione	2.5
Elettrone-Neutro Eccitazione	2.2
Elettrone-Ione Coulomb	1.3
Elettrone-Ione Ricombinazione	$\gg 1.0$

Tabella 4.2: Cammino libero medio per collisioni in un propulsore ad effetto Hall

4.4 Equazioni elettroniche

Il campo elettrico ed il campo magnetico non hanno componente azimutale:

$$\mathbf{E} = [E_r \quad 0 \quad E_z]$$

$$\mathbf{B} = [B_r \quad 0 \quad B_z]$$

Consideriamo dapprima le equazioni in forma vettoriale:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = N_P \quad (4.36)$$

$$n_e m_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right] = -\nabla p_e - n_e q \mathbf{E} + \dots$$

$$\mathbf{j}_e \times \mathbf{B} - m_e N_P \mathbf{u}_e + \mathfrak{R} \quad (4.37)$$

$$n_e \left[\frac{\partial e_T}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla e_T \right] = -\nabla \cdot (p_e \mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_e - e_T N_P + \dots$$

$$E_{ei} + E_{ea} - E_{ion} N_P \quad (4.38)$$

I seguenti termini e le assunzioni fisiche relative verranno discussi nelle prossime sezioni:

N_P	Rateo di ionizzazione
p_e	Pressione elettronica
\mathfrak{R}	Scambio di quantità di moto tra gli elettroni e le particelle pesanti
E_{ei}	Scambio energetico tra elettroni e ioni
E_{ea}	Scambio energetico tra elettroni e neutri
E_{ion}	Energia generata per ionizzare atomi di Xe

Le equazioni precedenti sono dette equazioni della “Magnetohydrodynamic” (MHD). È interessante notare che sono molto simili alle equazioni della Fluidodinamica (Navier-Stokes), ma presentano termini addizionali come la generazione di carica, la forza elettro-magnetica ($\mathbf{j}_e \times \mathbf{B}$) ed i termini collisionali tra specie differenti.

Nella simulazione assumeremo uno stato quasi-stazionario; ciò è in accordo con quanto presentato da molti autori, i quali suggeriscono che, data la piccola massa, gli elettroni raggiungano uno stato di equilibrio in un tempo molto più piccolo rispetto alle particelle pesanti, ioni e neutri. Le equazioni

(4.36-4.38) vengono così riscritte:

$$\frac{\partial(n_e u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r n_e u_r)}{\partial r} = N_P \quad (4.39)$$

$$n_e m_e \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_\vartheta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p_e}{\partial r} - n_e q E_r + j_\vartheta B_z - m_e N_P u_r + \mathfrak{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}_r \quad (4.40)$$

$$n_e m_e \left[u_r \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} + \frac{u_\vartheta u_r}{r} \right] = B_r j_z - B_z j_r - m_e N_P u_\vartheta + \mathfrak{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\vartheta \quad (4.41)$$

$$n_e m_e \left[u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} - n_e q E_z - j_\vartheta B_r - m_e N_P u_z + \mathfrak{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z \quad (4.42)$$

$$n_e \left[u_r \frac{\partial e_T}{\partial r} + u_z \frac{\partial e_T}{\partial z} \right] = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r p_e u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(p_e u_z)}{\partial z} \right] - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r q_r)}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + \dots \\ E_r j_r + E_z j_z - e_T N_P + E_{ei} + E_{ea} - E_{ion} N_P \quad (4.43)$$

4.5 Equazione di conservazione della carica

L'equazione (4.36) coinvolge un termine di generazione-ricombinazione, N_P , che rappresenta la ionizzazione di atomi neutri dovuta alle collisioni con il fluido elettronico. Per quanto riguarda gli elettroni, in un motore ad effetto Hall abbiamo a che fare con due importanti fenomeni:

- ricombinazione
- rateo di ionizzazione

4.5.1 Ricombinazione

Il rateo di ricombinazione può essere scritto:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\alpha n_e n_i \quad (4.44)$$

dove α è il rateo di ricombinazione macroscopico. In accordo con Mitchner, Krueger [4], possiamo approssimare α con:

$$\alpha = 1.09 \times 10^{-20} n_e T_e^{-\frac{9}{2}} [m^3/s] \quad (4.45)$$

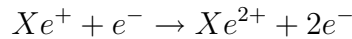
Assumendo la situazione più favorevole con $T_e = 1.0 [eV]$, con densità tipiche $n_i \sim n_e \simeq 10^{18} [m^{-3}]$ si ottiene:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \simeq -5.6 \times 10^{15} [m^{-3}s^{-1}]$$

Tale valore è molto più piccolo del rateo di ionizzazione caratteristico ($\sim 10^{20} [m^{-3}s^{-1}]$), per cui nella simulazione verrà ignorata la ricombinazione.

4.5.2 Rateo di ionizzazione

Il rateo di ionizzazione, $\frac{\partial n_i}{\partial t} = N_P$, è il rateo di creazione di ioni per unità di volume. Nel modello si assumerà che solo le collisioni elettrone-neutro siano in grado di generare ioni, mentre si ignoreranno ionizzazioni di secondo grado. L'insieme dei dati sperimentali sulla sezione d'urto per ionizzazioni di primo e secondo grado presentati da Szabo (sezione 4.3.1), ci permette di ignorare le collisioni tra ioni ed elettroni:



Le sezioni d'urto per questi fenomeni sono più piccole di più di un ordine di grandezza rispetto a quelle relative alla ionizzazione di primo grado. In definitiva possiamo esprimere il termine di ionizzazione come segue:

$$N_P = n_e \nu_{ion} = n_e n_a \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} Q_{ion} \quad (4.46)$$

4.6 Equazione di moto

Vedremo più avanti (capitolo 6) come sarà possibile scrivere le equazioni della quantità di moto in maniera più semplice e compatta utilizzando un opportuno sistema di riferimento. Per il momento alcune considerazioni sui termini coinvolti nelle equazioni ci permettono di effettuare utili semplificazioni.

4.6.1 Scambio di quantità di moto tra elettroni e particelle pesanti , \mathfrak{R}

Possiamo considerare gli elettroni come un flusso ad alta energia di particelle veloci che urtano su uno sfondo di macro-particelle di ioni e neutri. Nelle equazioni (4.40-4.42) compare un termine di scambio di quantità di moto:

$$\mathfrak{R} = R_{ei} + R_{ea}$$

Come per la ionizzazione, che è dominata essenzialmente dalla mobilità locale degli elettroni, lo scambio di quantità di moto tra gli elettroni e le particelle pesanti è dominato dalla sezione d'urto di entrambe le specie (il “bersaglio” e quella incidente, rispettivamente gli atomi neutri e gli elettroni).

La sezione d'urto degli ioni ha lo stesso ordine di grandezza di quella dei neutri (approssimativamente $10^{-20} [m^3]$ in tutto il canale), ma la densità degli ioni è molto più bassa. Questo ci permette di trascurare lo scambio di

quantità di moto tra elettroni ed atomi ionizzati.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ei} &\approx 0 \\ \mathbf{R}_{ea} &= -m_e(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_a)(R_m + N_P) \end{aligned} \quad (4.47)$$

R_m rappresenta il rateo delle collisioni elastiche, che dipende essenzialmente dalla temperatura locale e dalla densità del flusso elettronico:

$$R_m = n_e \nu_e = n_e n_a \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \bar{Q}_e \quad (4.48)$$

4.6.2 Pressione elettronica, p_e

Come mostrato nella sezione 4.2.3, una distribuzione di velocità Maxwelliana porta ad una pressione uguale a:

$$p_e = n_e k T_e \quad (4.49)$$

4.6.3 Diffusione anomala

La teoria dei plasmi, [2], [3], mostra che i fenomeni di diffusione attraverso le linee di campo magnetico, nei gas pienamente ionizzati, avvengono in accordo ad un coefficiente “classico”:

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp} n_e k T_e}{B^2} \quad (4.50)$$

dove η_{\perp} rappresenta la resistività del plasma.

La dipendenza da B^{-2} deriva dalla teoria della diffusione basata sulle collisioni Coulombiane come mezzo principale di trasferimento delle proprietà locali del fluido.

Sebbene tale teoria sia nota da tempo, verifiche di laboratorio di tale dipendenza nei gas pienamente ionizzati non sono state effettuate fino al 1960. In quasi tutti questi esperimenti D_{\perp} sembra scalare più come B^{-1} che come B^{-2} , ed il decadimento del plasma risulta essere esponenziale nel tempo piuttosto che inversamente proporzionale. Inoltre il valore di D_{\perp} risulta più grande di quello derivante dall'equazione (4.50).

Questo andamento anomalo fu notato per la prima volta a metà degli anni '40 da Bohm, Burhop e Massey. Bohm propose una formula semiempirica per tenere conto di questi valori “anomali”:

$$D_{\perp} = \frac{1}{16} \frac{k T_e}{q B} \equiv D_{Bohm} \quad (4.51)$$

dove D_{\perp} è chiamata *Diffusione Anomala di Bohm* ed è osservata in un sorprendente numero di esperimenti differenti. Inoltre, è interessante notare che D_{Bohm} non dipende dalla densità, per cui il decadimento è una funzione esponenziale del tempo.

La fisica che governa tali fenomeni non è ancora del tutto chiara; molte autorevoli teorie pensano ad instabilità e derive collettive che si genererebbero spontaneamente nel plasma; oltre a ciò occorre dire che non vi è accordo tra gli autori sul coefficiente $\frac{1}{16}$. Ciononostante un approccio comune è quello di introdurre un parametro “ad hoc” (vedere equazione 4.55) per tenere conto della diffusione anomala.

4.6.4 Analisi dei termini trascurabili

Vengono fatte alcune assunzioni semplificative per rendere più agevole l’implementazione numerica:

- a causa della trascurabile massa degli elettroni, i termini convettivi possono essere ignorati (ciò è in buon accordo con molti modelli già presenti in letteratura);
- la componente azimutale nella velocità dei neutri (\mathbf{u}_a) è trascurabile rispetto a quella degli elettroni, ciò equivale a dire che i neutri non sono coinvolti nel vortice circonferenziale degli elettroni.

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\theta} \simeq -m_e u_{\theta} (R_m + N_P) \quad (4.52)$$

4.6.5 Riscrittura dell’equazione

Introduciamo alcune definizioni che ci permetteranno di riscrivere le equazioni (4.40) e (4.42) in maniera più semplice.

- Ricordando l’equazione (4.6),

$$\mathbf{j} = -n_e q \mathbf{u}$$

è possibile eliminare la velocità degli elettroni introducendo la corrente.

- Possiamo scrivere i ratei di collisione come una frequenza di collisione equivalente:

$$\frac{(2N_P + R_m)}{n_e} = 2\nu_p + \nu_m \equiv \nu \quad (4.53)$$

Considerando anche la diffusione anomala, otteniamo:

$$\nu_{anom} = k_{anom} \left(\frac{qB}{m_e} \right) \quad (4.54)$$

$$k_{anom} \approx 0.01 \quad (4.55)$$

$$\bar{\nu} \equiv 2\nu_{ion} + \nu_{el} + \nu_{anom} \quad (4.56)$$

Definiamo il parametro β_H (parametro di Hall)

$$\frac{qB}{m_e \bar{\nu}} = \frac{\varpi_e}{\bar{\nu}} \equiv \beta_H \quad (4.57)$$

che ci permetterà di scrivere le equazioni in maniera più compatta.

- Introduciamo il potenziale elettrico ϕ , dal quale possiamo ricavare il campo elettrico per semplice derivazione spaziale:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

4.7 Equazione dell'energia

4.7.1 Energia termica media

Assumiamo che l'energia cinetica associata alla deriva sia generalmente più piccola dell'energia termica media.

$$\frac{1}{2}m_e u_e^2 \ll kT_e \Rightarrow e_T \approx e_i$$

dove, come mostrato nella sezione 4.2.3,

$$e_i = \frac{3}{2}kT_e \quad (4.58)$$

4.7.2 Diffusione della temperatura e conduzione termica

La temperatura si propaga attraverso il dominio computazionale tramite:

- diffusione convettiva, dovuta al trasporto degli elettroni
- diffusione conduttiva

Diffusione convettiva

Un contributo rilevante alla diffusione dei gradienti di temperatura attraverso il dominio computazionale è dato dai termini classici di diffusione convettiva, come si osserva nelle equazioni dei fluidi di Navier-Stokes.

Tali termini sono mostrati implicitamente nell'equazione (4.43) nei termini seguenti:

$$\dots = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r p_e u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(p_e u_z)}{\partial z} \right] - \dots \quad (4.59)$$

Conduzione termica

Il calore diffonde seguendo la classica legge di Fourier:

$$\mathbf{q} = -\bar{\bar{\lambda}} \cdot \nabla T_e \quad (4.60)$$

dove \mathbf{q} rappresenta il flusso di calore scritto in un sistema di riferimento orientato secondo linee di campo magnetico, mentre $\bar{\bar{\lambda}}$ è il tensore di conducibilità:

$$\bar{\bar{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{pmatrix}$$

con λ_{\parallel} e λ_{\perp} coefficienti di conducibilità termica medi, rispettivamente lungo linee di campo magnetico ed ortogonalmente ad esse.

4.7.3 Conducibilità termica degli elettroni

In accordo con Fife, [14], assumiamo che calore e massa diffondano secondo lo stesso meccanismo. Rispetto alla direzione perpendicolare al campo magnetico, possiamo scrivere:

$$D_{\perp} \simeq \alpha_{\perp} \quad (4.61)$$

dove D_{\perp} e α_{\perp} sono i coefficienti di diffusione di massa e calore. L'equazione precedente è equivalente ad affermare che il numero di Lewis ($Le = D/\alpha$) è dell'ordine dell'unità. Scriviamo le espressioni di D_{\perp} e α_{\perp} :

$$\alpha_{\perp} = \frac{\lambda_{\perp}}{c_p \rho} = \frac{2\lambda_{\perp}}{5n_e k} \quad (4.62)$$

$$D_{\perp} = \frac{kT_e \mu_{e,\perp}}{e} \quad (4.63)$$

Sostituendo si trova:

$$\lambda_{\perp} = \frac{5n_e k^2 T_e \mu_{e,\perp}}{2e} \quad (4.64)$$

dove $\mu_{e,\perp}$ rappresenta la mobilità degli elettroni attraverso linee di campo magnetico:

$$\mu_{e,\perp} = \frac{\mu_e}{1 + \beta_H^2} \quad (4.65)$$

e

$$\mu_e = \frac{e}{m_e \nu} \quad (4.66)$$

La diffusione in direzione parallela al campo magnetico può essere determinata similmente, assumendo come coefficiente di mobilità $\mu_{e,\parallel} = \mu_e$. Bisogna notare che tale termine è molto più grande di quello perpendicolare per gli elevati valori raggiunti dal parametro di Hall, β_H .

Capitolo 5

Il Sistema di Coordinate Magnetico

5.1 Analisi del campo magnetico

Il campo magnetico è governato dalle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (5.2)$$

Nella regione del plasma le variazioni di campo magnetico dovute alle correnti ed alle variazioni del campo elettrico sono trascurabili se confrontate con il campo generato dall'elettromagnete.

Nell'equazione (5.2), nota come “Legge di Ampere”, i termini di interesse sono $\mu_0 \mathbf{j}$ e $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Approssimativamente l'impulso specifico (I_{sp}) può essere assunto uguale a 2,000 [s], ciò significa che la velocità degli ioni all'uscita del motore raggiunge $\sim 20,000$ [m/s]; con una densità ionica tipica di 10^{17} [m^{-3}], la corrente assiale è $j_z \simeq 320$ [A/m^2]. In un HET ben progettato

$$\beta_H \simeq 100 \Rightarrow j_\vartheta = \beta_H j_z \simeq 3.2 \times 10^4 [Am^{-2}]$$

Le variazioni di campo elettrico possono essere stimate come

$$\frac{V_D}{L_{ch}} dt^{-1} \approx 10^{10} [Vm^{-1}s^{-1}]$$

dove dt è il passo temporale di simulazione più piccolo. Quindi:

$$\mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \approx 0.025 [Tm^{-1}]$$

che, in definitiva, è più piccolo dei gradienti di campo magnetico dovuti all'elettromagnete ($\sim 0.5 [Tm^{-1}]$).

In questa simulazione si utilizza un campo magnetico le cui linee di campo e la cui intensità sono mostrate rispettivamente nelle figure 5.1 e 5.2, ricavate utilizzando dati forniti dal CentroSpazio.

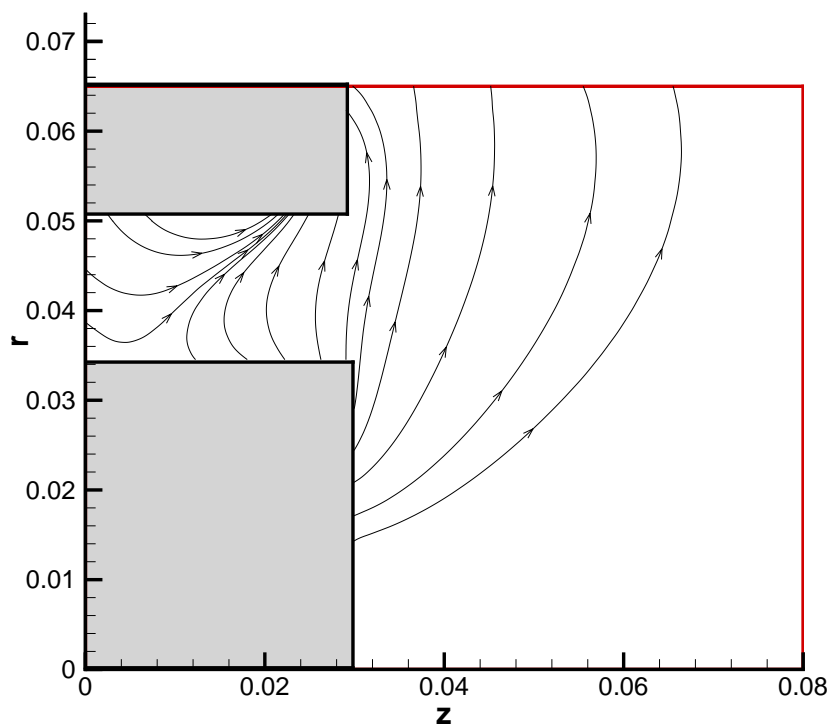


Figura 5.1: Linee di campo magnetico nella zona del canale e del getto

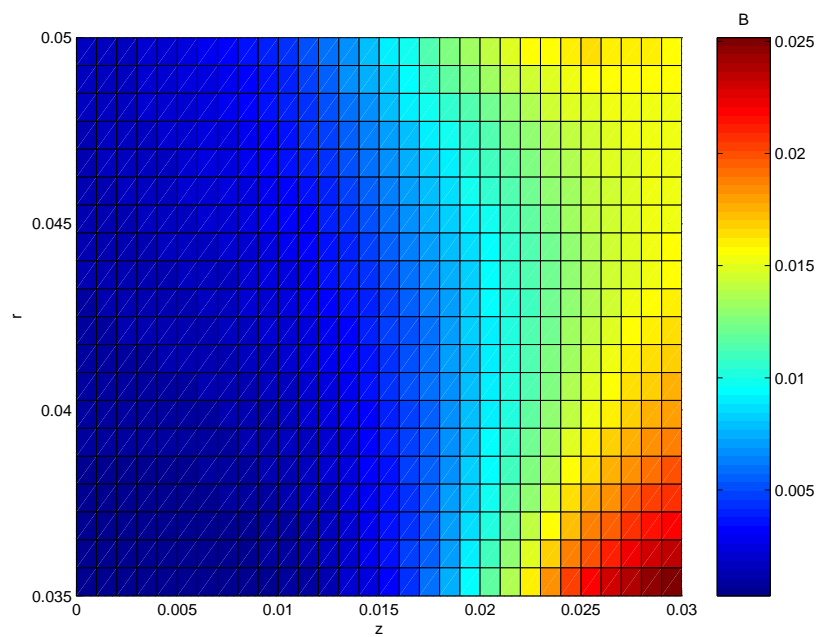


Figura 5.2: Intensità del campo magnetico nel canale, $[T]$

5.2 Definizione del passaggio di coordinate

In base a quanto detto nella sezione precedente, la legge di Ampere si riduce a,

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.3)$$

Possiamo pertanto definire una funzione di potenziale magnetico il cui gradiente è ovunque parallelo a \mathbf{B} . Tale funzione viene indicata con μ , definita da,

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = B_z \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = B_r \quad (5.5)$$

quindi,

$$\nabla \mu = (B_z \hat{\mathbf{e}}_z + B_r \hat{\mathbf{e}}_r) \quad (5.6)$$

Inoltre, poichè $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, è possibile definire una funzione di corrente il cui gradiente è ovunque ortogonale a \mathbf{B} . Tale funzione viene indicata con λ , definita da,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = r B_r \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = -r B_z \quad (5.8)$$

quindi,

$$\nabla \lambda = (r B_r \hat{\mathbf{e}}_z - r B_z \hat{\mathbf{e}}_r) \quad (5.9)$$

Siamo dunque in grado di associare al campo magnetico un sistema di coordinate curvilinee ortogonali λ, μ, ϑ , il cui valore è noto in tutto il campo a meno di una costante additiva, ricavata ponendo l'origine del sistema di coordinate all'ingresso del canale.

I versori di tale sistema sono così definiti,

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{B_r \hat{\mathbf{i}} - B_z \hat{\mathbf{j}}}{B} \quad (5.10)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{B_z \hat{\mathbf{i}} + B_r \hat{\mathbf{j}}}{B} \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_\vartheta \quad (5.12)$$

con $\hat{\mathbf{e}}_1$ ortogonale a \mathbf{B} ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ parallelo a \mathbf{B} .

Le figure 5.4 e 5.5 mostrano le nuove coordinate all'interno del canale.

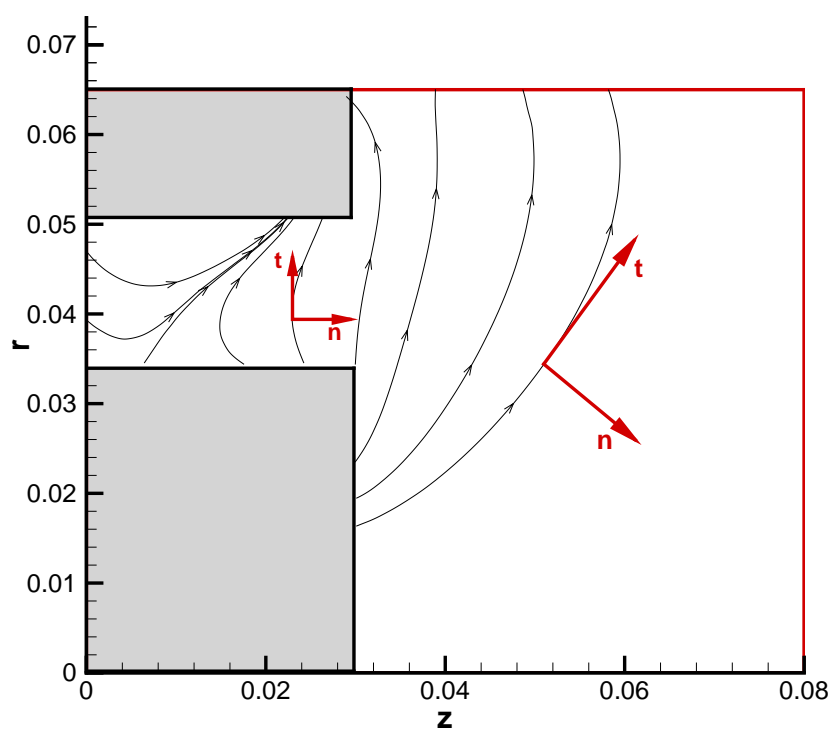


Figura 5.3: Linee di campo magnetico e coordinate curvilinee associate

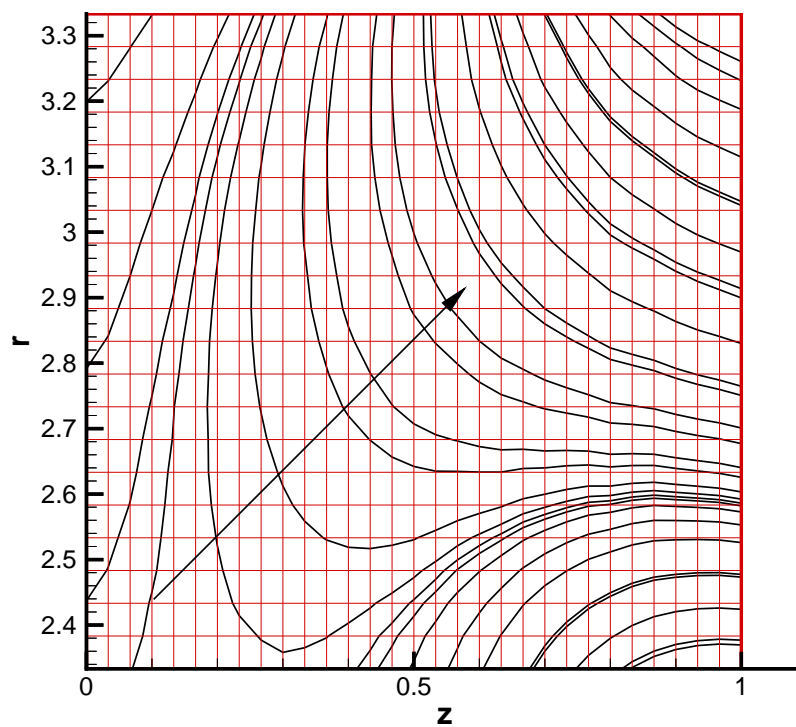
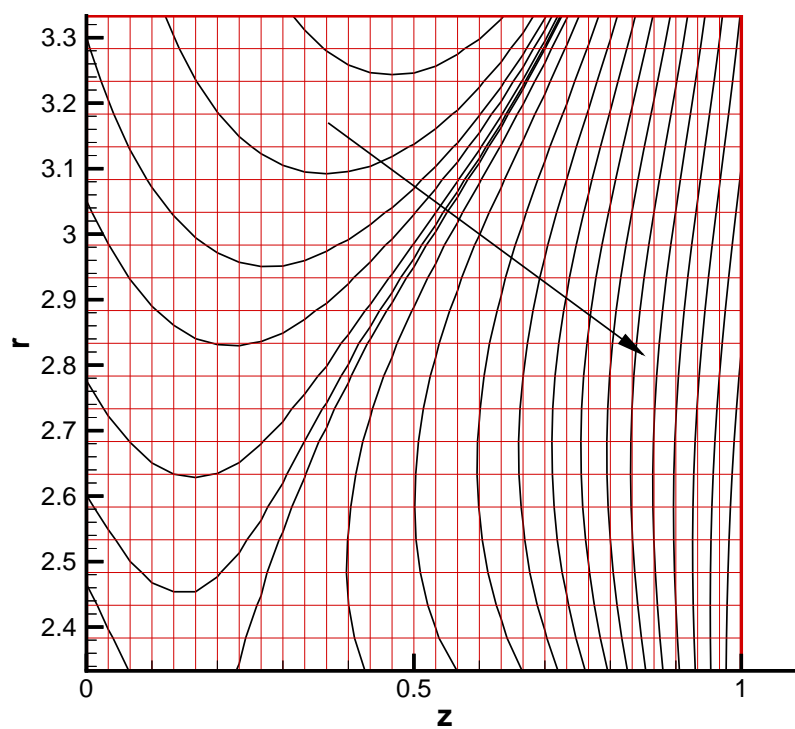


Figura 5.4: Linee coordinate μ nel canale accelerativo e direzione di crescita

Figura 5.5: Linee coordinate λ nel canale accelerativo e direzione di crescita

5.3 Richiami sui sistemi di coordinate curvilinee

Il sistema di coordinate curvilinee ottenuto è, come detto, ortogonale, per cui dalla definizione dei gradienti sono immediatamente ricavabili i *fattori di scala*, [5], che definiscono le lunghezze d'arco e gli elementi di volume e ci permettono di esprimere il gradiente, la divergenza ed il rotore, in termini di λ, μ, ϑ , di cui faremo uso nel seguito.

Per definizione:

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_i} \right| \quad i = 1, 2, 3$$

Per un sistema ortogonale:

$$h_i^{-1} = |\nabla x_i| \quad i = 1, 2, 3$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{rB} \\ h_2 &= \frac{1}{B} \\ h_3 &= r \end{aligned}$$

Ricaviamo immediatamente:

$$d\mathbf{S}_{12} = h_1 h_2 dx_1 dx_2 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$dV = \frac{d\lambda d\mu d\vartheta}{B^2}$$

Inoltre, direttamente dalle definizioni, possiamo scrivere gradiente, divergenza e rotore:

$$\begin{aligned}\nabla(\dots) &= \left[rB \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{\mathbf{n}} + B \frac{\partial}{\partial \mu} \hat{\mathbf{t}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{e}}_{\vartheta} \right] \\ \nabla \cdot (\dots) &= B^2 \left[\frac{\partial(\frac{r}{B} \dots)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\frac{1}{B} \dots)}{\partial \mu} + \frac{\partial(\frac{1}{rB^2} \dots)}{\partial \vartheta} \right] \\ \nabla \times (\dots) &= B^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{rB} \hat{\mathbf{t}} & \frac{1}{B} \hat{\mathbf{n}} & r \hat{\mathbf{e}}_{\vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ (\frac{1}{rB} \dots) & (\frac{1}{B} \dots) & (r \dots) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Capitolo 6

Definizione del Sistema di Equazioni Risolutivo

L'analisi delle equazioni condotta nel capitolo 4, suggerisce di utilizzare il sistema di riferimento magnetico, visto nel capitolo precedente, per la risoluzione delle equazioni stesse. In questo modo si riescono a ridurre le complicazioni introdotte dall'anisotropia del problema e, di conseguenza, se ne semplifica l'implementazione numerica. Seguendo le semplificazioni riportate nel capitolo 4, riscriviamo il sistema di equazioni elettroniche (4.39-4.43) nel sistema di riferimento magnetico.

Equazione di conservazione della carica:

$$\frac{\partial(\frac{j_t}{B})}{\partial\mu} + \frac{\partial(\frac{rj_n}{B})}{\partial\lambda} = -qN_p \quad (6.1)$$

Equazioni scalari della quantità di moto:

$$n_e q B \frac{\partial\phi}{\partial\mu} + \frac{j_t B}{\beta_H} = B \frac{\partial(n_e k T_e)}{\partial\mu} + \dots - m_e (R_m + N_p) \mathbf{u}_a \cdot \hat{t} \quad (6.2)$$

$$n_e q r B \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} + \frac{j_n B}{\beta_H} (1 + \beta_H^2) = r B \frac{\partial(n_e k T_e)}{\partial\lambda} + \dots - m_e (R_m + N_p) \mathbf{u}_a \cdot \hat{n} \quad (6.3)$$

$$j_\vartheta + \beta_H j_n = 0 \quad (6.4)$$

Equazione dell'energia:

$$\begin{aligned}
 & B^2 \left[\frac{\partial \lambda_t}{\partial \mu} \frac{\partial T_e}{\partial \mu} + \lambda_t \frac{\partial^2 T_e}{\partial \mu^2} \right] + \dots \\
 + B^2 \left[\frac{\partial(r^2 \lambda_n)}{\partial \lambda} \frac{\partial T_e}{\partial \lambda} + r^2 \lambda_n \frac{\partial^2 T_e}{\partial \lambda^2} \right] &= \frac{5k}{2q} \left[j_t B \frac{\partial T_e}{\partial \mu} + j_n r B \frac{\partial T_e}{\partial \lambda} \right] + \dots \\
 & - \left[j_t B \frac{\partial \phi}{\partial \mu} + j_n r B \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right] + \dots \\
 & - \left(\frac{5}{2} k T_e + E_{ion} \right) N_p - 3 k T_e \frac{m_e}{m_a} R_m
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.1 Equazioni e parametri adimensionali

Le equazioni ottenute sono state adimensionalizzate utilizzando opportuni parametri di seguito definiti. Ciò viene fatto essenzialmente per due motivi:

- la procedura numerica risulta più stabile, poichè i valori dei coefficienti nelle matrici risultano dello stesso ordine di grandezza;
- evidenziare la dipendenza del problema da tali parametri può essere utile per valutare la sensibilità delle prestazioni al variare delle condizioni geometriche ed operative.

Vengono definiti questi parametri:

$$\begin{aligned}
 n_{a0} &= \frac{\dot{m}}{m_a U_{a0} A} & j_0 &= \frac{q \dot{m}}{m_a A} \\
 Q_0 &= 10.0^{-20} & g_0 &= \sqrt{\frac{8qV_{ion}}{\pi m_e}} \\
 \lambda_0 &= 10.0^{-5} & \hat{\mathbf{u}}_a &= \frac{\mathbf{u}_a}{U_{a0}} \\
 \hat{n}_a &= \frac{n_a}{n_{a0}} & \hat{n}_e &= \frac{n_e}{n_{a0}} \\
 \hat{\phi} &= \frac{\phi}{V_D} & \hat{T}_e &= \frac{kT_e}{qV_{ion}} \\
 \hat{j} &= \frac{j}{j_0} & \hat{g} &= \frac{g}{g_0} \\
 \hat{Q}_{ion} &= \frac{Q_{ion}}{Q_0} & \hat{Q}_e &= \frac{Q_e}{Q_0} \\
 \hat{r} &= \frac{r}{H_{ch}} & \hat{B} &= \frac{B}{B_{MAX}} \\
 \hat{\lambda} &= \frac{\lambda}{B_{MAX} H_{ch}^2} & \hat{\mu} &= \frac{\mu}{B_{MAX} L_{ch}} \\
 \hat{N}_P &= \hat{n} \hat{n}_a \hat{Q}_{ion} \hat{g} & \hat{R}_m &= \hat{n} \hat{n}_a \hat{Q}_e \hat{g} \\
 \hat{\lambda}_n &= \frac{\lambda_n}{\lambda_0} & \hat{\lambda}_t &= \frac{\lambda_t}{\lambda_0}
 \end{aligned}$$

Le equazioni (6.1-6.5) sono presentate in forma adimensionale, dove il “cappuccio” sta ad indicare la forma adimensionale delle variabili:

$$\xi_0 \frac{\partial(\frac{\hat{j}_t}{\hat{B}})}{\partial \hat{\mu}} + \frac{\partial(\frac{\hat{r}\hat{j}_n}{\hat{B}})}{\partial \hat{\lambda}} = -\xi_0 \xi_1 \frac{\hat{N}_p}{\hat{B}^2} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_e \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}} + \xi_2 \frac{\hat{j}_t \hat{B}}{\beta_H} &= \xi_4 \hat{B} \frac{\partial(\hat{n}_e \hat{T}_e)}{\partial \hat{\mu}} + \dots \\ &\quad - 2\xi_1 \xi_5 \xi_6 (\hat{R}_m + \hat{N}_p) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \hat{t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_e \hat{r} \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}} + \xi_0 \xi_2 \frac{\hat{j}_n \hat{B}}{\beta_H} (1 + \beta_H^2) &= \xi_4 \hat{r} \hat{B} \frac{\partial(\hat{n}_e \hat{T}_e)}{\partial \hat{\lambda}} + \dots \\ &\quad - 2\xi_0 \xi_1 \xi_5 \xi_6 (\hat{R}_m + \hat{N}_p) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\hat{j}_{\vartheta} + \beta_H \hat{j}_n = 0 \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} &\xi_0^2 \xi_3 \xi_4 \hat{B}^2 \left[\frac{\partial \hat{\lambda}_t}{\partial \hat{\mu}} \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \hat{\mu}} + \hat{\lambda}_t \frac{\partial^2 \hat{T}_e}{\partial \hat{\mu}^2} \right] + \dots \\ &+ \xi_3 \xi_4 \hat{B}^2 \left[\frac{\partial(\hat{r}^2 \hat{\lambda}_n)}{\partial \hat{\lambda}} \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \hat{\lambda}} + \hat{r}^2 \hat{\lambda}_n \frac{\partial^2 \hat{T}_e}{\partial \hat{\lambda}^2} \right] = \xi_0 \xi_4 \frac{5}{2} \left[\xi_0 \hat{j}_t \hat{B} \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \hat{\mu}} + \hat{j}_n \hat{r} \hat{B} \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \hat{\lambda}} \right] + \dots \\ &\quad - \xi_0 \left[\xi_0 \hat{j}_t \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}} + \hat{j}_n \hat{r} \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}} \right] + \dots \\ &\quad - \xi_0^2 \xi_1 \xi_4 \left[\left(\frac{5}{2} \hat{T}_e + 1 \right) + 3\xi_5 \hat{R}_m \hat{T}_e \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

con:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{H_{ch}}{L_{ch}} & \xi_1 &= \frac{n_{a0} Q_0 g_0 L_{ch}}{U_{a0}} \\ \xi_2 &= \frac{B_{MAX} U_{a0} L_{ch}}{V_D} & \xi_3 &= \frac{\lambda_0}{k L_{ch} U_{a0} n_{a0}} \\ \xi_4 &= \frac{V_{ion}}{V_D} & \xi_5 &= \frac{m_e}{m_a} \\ \xi_6 &= \frac{m_a U_{a0}^2}{2q V_D} \end{aligned}$$

6.2 Studio della natura matematica del problema

Per assegnare condizioni al contorno consistenti con la fisica del problema, occorre analizzare la natura matematica delle equazioni.

Consideriamo un'equazione alle differenze parziali lineare del secondo ordine del tipo:

$$\ell(x, y)\Psi(x, y) = f(x, y) \quad (6.11)$$

dove:

$$\ell(x, y) = \left(A(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + F(x, y) \right) \quad (6.12)$$

Se in tutto il dominio computazionale il determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

è positivo, negativo o nullo, l'equazione (6.12) si dice, rispettivamente, ellittica, parabolica o iperbolica. Dalla natura dell'equazione segue direttamente la scelta delle condizioni al contorno.

Equazione della Temperatura

Utilizzando l'equazione (6.10), si ricava immediatamente il determinante:

$$\Delta = \xi_0^2 \xi_3^2 \xi_4^2 \hat{B}^4 \hat{r}^2 \hat{\lambda}_n \hat{\lambda}_t > 0 \quad (6.13)$$

Quindi l'equazione della temperatura è ellittica e richiede una condizione su tutto il contorno.

Equazione del Potenziale

Prima di tutto dobbiamo ricondurci ad un'unica equazione per il potenziale. Considerando l'equazione di continuità e quelle di moto possiamo scrivere:

$$\xi_0 \frac{\partial(\frac{\hat{j}_t}{\hat{B}})}{\partial \hat{\mu}} + \frac{\partial(\frac{\hat{r}\hat{j}_n}{\hat{B}})}{\partial \hat{\lambda}} = C_I \quad (6.14)$$

$$\hat{n}_e \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}} + \xi_2 \frac{\hat{j}_t \hat{B}}{\beta_H} = C_{II} \quad (6.15)$$

$$\hat{n}_e \hat{r} \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}} + \xi_0 \xi_2 \hat{j}_n \hat{B} \frac{1 + \beta_H^2}{\beta_H} = C_{III} \quad (6.16)$$

$$\hat{j}_\vartheta + \beta_H \hat{j}_n = 0 \quad (6.17)$$

dove C_I, C_{II}, C_{III} rappresentano quantità note, funzione della temperatura e densità locale degli elettroni, e della velocità dei neutri. Dalle (6.15) e (6.16) si ricava:

$$\hat{j}_t = \frac{\left(C_{II} - \hat{n}_e \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}}\right) \beta_H}{\xi_2 \hat{B}} = A + B \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}} \quad (6.18)$$

$$\hat{j}_n = \frac{\left(C_{III} - \hat{n}_e \hat{r} \hat{B} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}}\right) \beta_H}{\xi_0 \xi_2 \hat{B} (1 + \beta_H^2)} = C + D \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}} \quad (6.19)$$

che sostituite nella (6.14) danno l'equazione cercata per il potenziale:

$$\xi_0 \tilde{B} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}^2} + \tilde{D} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}^2} + \xi_0 \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \hat{\mu}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\mu}} + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \hat{\lambda}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{\lambda}} = C_I + \xi_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \hat{\mu}} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \hat{\lambda}} \quad (6.20)$$

dove:

$$\tilde{A} = \frac{C_{II} \beta_H}{\xi_2 \hat{B}^2} \quad (6.21)$$

$$\tilde{B} = -\frac{\hat{n}_e \beta_H}{\xi_2 \hat{B}} \quad (6.22)$$

$$\tilde{C} = \frac{C_{III} \hat{r} \beta_H}{\xi_0 \xi_2 \hat{B}^2 (1 + \beta_H^2)} \quad (6.23)$$

$$\tilde{D} = -\frac{\hat{n}_e \hat{r}^2 \beta_H}{\xi_0 \xi_2 \hat{B} (1 + \beta_H^2)} \quad (6.24)$$

Il determinante cercato è, quindi:

$$\Delta = \xi_0 \tilde{B} \tilde{D} = \frac{\hat{n}_e^2 \hat{r}^2 \beta_H^2}{\xi_2^2 \hat{B}^2 (1 + \beta_H^2)} \quad (6.25)$$

che è chiaramente maggiore di zero. Come la temperatura, pertanto, anche il potenziale obbedisce ad un'equazione ellittica e richiede una singola condizione su tutto il contorno del dominio.

6.3 Condizioni iniziali ed al contorno

Alcuni autorevoli autori riportano i risultati dei loro codici, ma sfortunatamente quasi tutti presentano analisi unidimensionali (per esempio [18]). I dati utilizzati per la simulazione sono stati estrapolati da tali pubblicazioni, considerando i gradienti lungo linee di campo molto più piccoli di quelli in direzione ortogonale.

Il campo magnetico utilizzato è già stato presentato in figura 5.2. Le figure 6.1 e 6.2 mostrano, rispettivamente, gli andamenti di densità degli ioni e di densità dei neutri utilizzati nella simulazione.

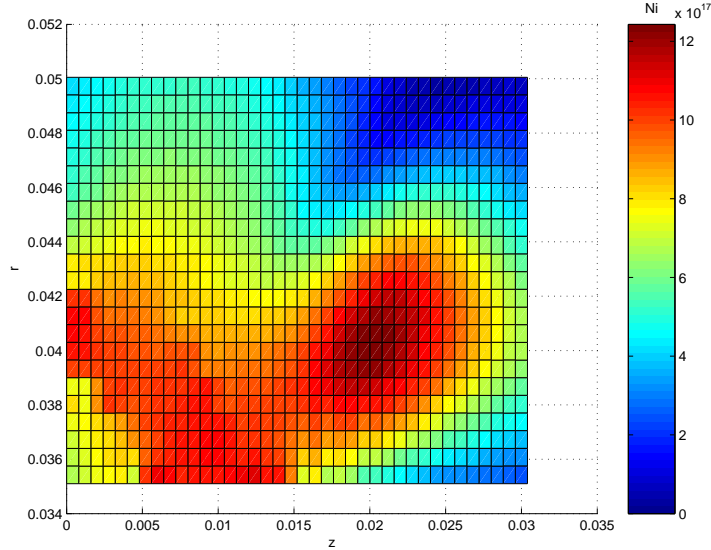


Figura 6.1: Densità degli ioni nel canale accelerativo, $[m^{-3}]$

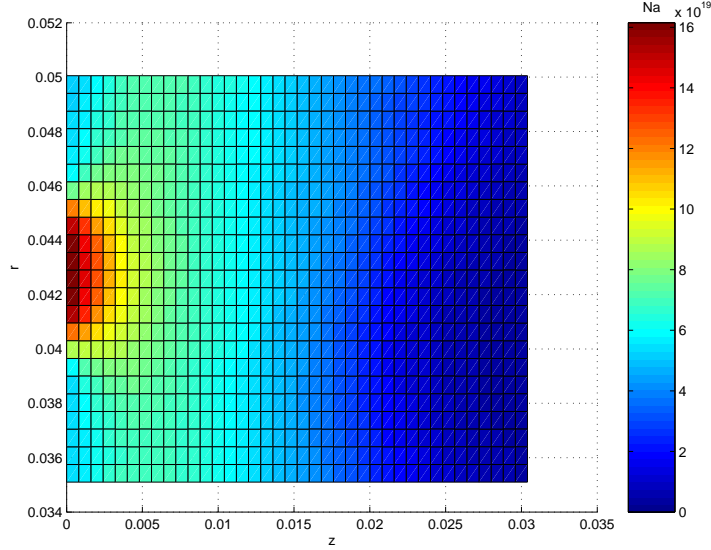


Figura 6.2: Densità dei neutri nel canale accelerativo, $[m^{-3}]$

6.3.1 Condizioni al contorno per il Potenziale Elettrico

Dall'analisi presentata nella sezione 6.2, segue direttamente la scelta delle condizioni al contorno.

Pareti laterali

In prossimità delle pareti laterali ci attendiamo che si formi una guaina. Dato che tale guaina si estende nel canale per una lunghezza dello stesso ordine di grandezza della lunghezza di Debye locale, circa $0.01 [mm]$, nella simulazione tale regione non verrà presa in considerazione. Ciò viene fatto essenzialmente per due motivi: prima di tutto per non avere una griglia troppo fitta, aumentando notevolmente il tempo richiesto per la convergenza, secondariamente perchè in tale regione cade l'ipotesi di quasi-neutralità. Quindi, fissiamo semplicemente il confine del dominio computazionale all'interfaccia plasma-guaina, utilizzando i vincoli fisici imposti dalla presenza della guaina come condizioni al contorno per il sistema di equazioni.

La teoria classica dei plasmi mostra che il numero di elettroni che diffondono verso la parete eguaglia il numero di ioni accelerati dalla caduta di potenziale dovuta alla guaina come riportato in [2] e [3]. Il flusso di ioni è definito come:

$$\Gamma_i = n_i v_{bohm} \quad (6.26)$$

dove v_{bohm} è detta “velocità di Bohm” e vale:

$$v_{bohm} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \quad (6.27)$$

Ricordando che, per l'ipotesi di quasi-neutralità, $n_i = n_e$, otteniamo infine la corrente in direzione della parete:

$$j_{bohm} = -q\Gamma_i \quad (6.28)$$

Possiamo perciò scrivere una condizione al contorno alla Neumann per il potenziale utilizzando l'equazione 6.2:

$$n_e q B \frac{\partial \phi}{\partial \mu} = -\frac{j_{Bohm} B}{\beta_H} + B \frac{\partial(n_e k T_e)}{\partial \mu} + \dots - m_e (R_m + N_p) \mathbf{u}_a \cdot \hat{t} \quad (6.29)$$

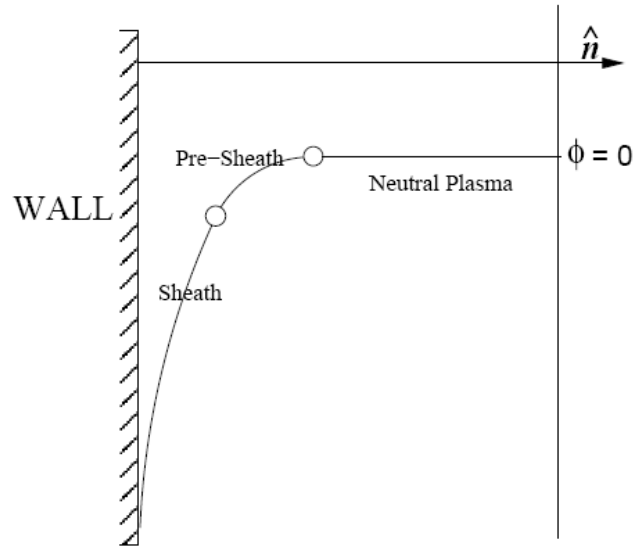


Figura 6.3: Profilo della guaina

Anodo

Ci si attende che alla superficie di contatto anodo-plasma, si crei una guaina estesa nel canale per una distanza dell'ordine di λ_D . Applicando la teoria classica dell'elettrodo, assumendo di avere una guaina sottile non collisionale ed una caduta all'anodo, la corrente emessa è:

$$I_a = A_a q n_e \left[\exp\left(\frac{q\phi_a}{kT_e}\right) \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} - \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \right] \quad (6.30)$$

dove ϕ_a è la caduta di potenziale all'anodo ed A_a è la sua area. Quindi, la caduta di potenziale risulta:

$$\phi_a = \frac{kT_e}{q} \ln \left[\frac{I_a}{A_a q n_e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}}} + \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi m_e}{m_i}} \right] \quad (6.31)$$

Alla fine il potenziale dell'anodo sarà:

$$\phi|_{anodo} = V_D - \phi_a \quad (6.32)$$

dove V_D è il voltaggio applicato al motore.

Catodo

Viene definito un catodo effettivo, coincidente con la linea di forza che interseca il catodo reale. Ci si attende che il potenziale abbia una caduta significativa vicino all'uscita del motore, inoltre sappiamo che all'esterno di questa zona, il potenziale decresce molto dolcemente, quindi la posizione esatta del catodo è irrilevante. Il catodo viene pertanto identificato con la linea di campo magnetico più esterna che interseca l'uscita del canale, per la quale si pone:

$$\phi|_{cat} = 0 \quad (6.33)$$

6.3.2 Condizioni al contorno per la Temperatura

Come precedentemente visto per il potenziale, nella sezione 6.2, abbiamo analizzato la natura dell'equazione della temperatura che guida la scelta delle condizioni al contorno.

Pareti laterali

Integrando il flusso di energia primario e secondario verso le pareti per una distribuzione di elettroni Maxwelliana, si ottiene un'equazione per la perdita di energia alla parete ([14]):

$$q_w = \Gamma_{e,primario} [(2kT_e - e\phi_w) - \delta_{eff}(2kT_{sec} - e\phi_w)] \quad (6.34)$$

dove T_{sec} è la temperatura di emissione degli elettroni secondari supposta costante ($T_{sec} = 2.0$ [eV] per il Nitrato di Boro). Quindi,

$$\frac{q_w}{\bar{\Gamma}_e} = \begin{cases} \exp\left(\frac{e\phi_w}{kT_e}\right) [(2kT_e - e\phi_w) - \delta_{eff}(2kT_{sec} - e\phi_w)] & T_e < 16.5 \text{ eV} \\ 2k(T_e - T_{sec}) & T_e > 16.5 \text{ eV} \end{cases} \quad (6.35)$$

dove

$$\bar{\Gamma}_e = \frac{n_{e0}\bar{c}_e}{4}$$

e

$$\bar{c}_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$$

Il termine δ_{eff} rappresenta il coefficiente di emissione secondario che si suppone dipendere dalla temperatura, in accordo con Fife, [14].

Noto il valore di q_w la condizione al contorno sulla temperatura è, come per il potenziale, alla Neumann:

$$q_w = -\lambda_t \nabla(T_e)|_t \quad (6.36)$$

In figura 6.4 sono mostrati i grafici di queste funzioni.

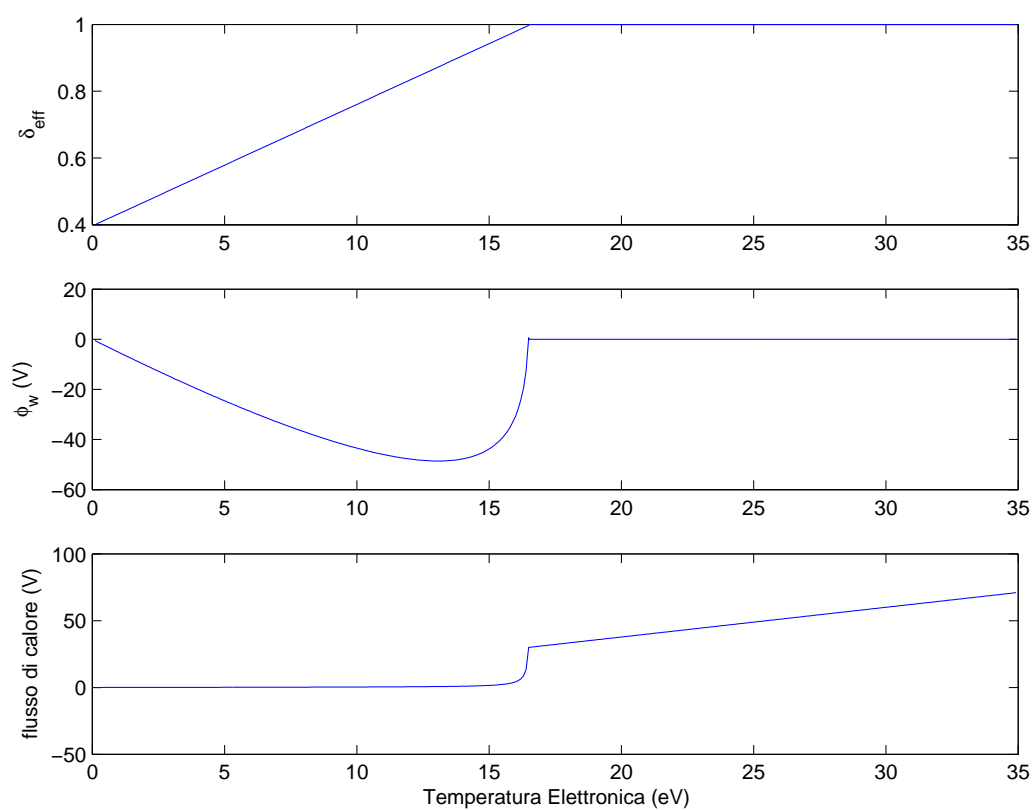


Figura 6.4: Coefficiente di emissione secondario δ_{eff} , potenziale di parete ϕ_w , flusso di calore normalizzato q_w in funzione di T_e [eV]

Anodo

Un'assunzione tipica, presentata da molti autori, è forzare il campo di temperatura ad avere pendenza nulla all'anodo:

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} \Big|_{anodo} = 0 \quad (6.37)$$

Catodo

Un'analisi dettagliata della distribuzione termica degli elettroni emessi dal catodo va oltre le ipotesi semplificative del modello prescelto. Un valore ragionevole, avvalorato da molti risultati sperimentali e teorici, è:

$$T_e \Big|_{cat} = 16.0 \text{ [eV]} \quad (6.38)$$

sui nodi della griglia appartenenti alla linea di campo magnetico più esterna che interseca l'uscita del canale.

Capitolo 7

Metodo Numerico

7.1 Analisi del dominio computazionale

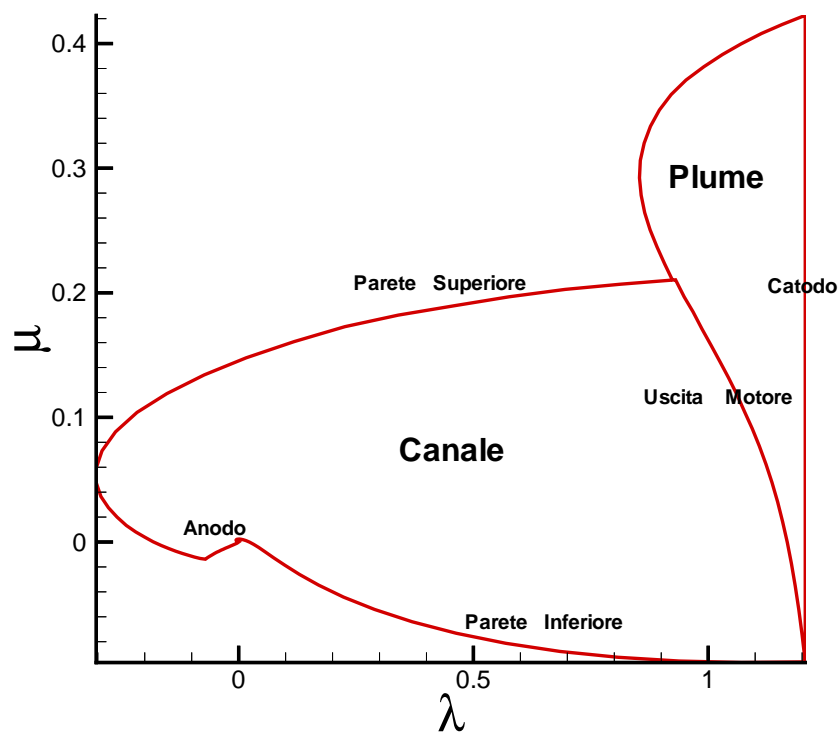


Figura 7.1: Dominio computazionale nel sistema di coordinate magnetico

Nel capitolo 5 abbiamo presentato la procedura che permette il passaggio da coordinate cilindriche a coordinate magnetiche. In questo modo siamo stati in grado di scrivere un sistema di equazioni più semplice, che però deve essere risolto in un dominio molto più complesso, poichè i confini non risultano più diretti secondo linee coordinate (vedere figura 7.1).

Il primo approccio preso in esame è stato quello tradizionale a griglia strutturata, che consiste nel discretizzare le equazioni su una griglia curvilinea conforme al contorno. Il vantaggio principale di questo metodo consiste in una notevole semplificazione nell'imposizione delle condizioni al contorno. Tuttavia, trasformare il sistema di equazioni nel sistema di coordinate curvilinee, porta ad una complessità nelle equazioni che di fatto annulla i vantaggi ottenuti riferendoci a coordinate magnetiche.

Un metodo differente, di uso sempre più diffuso negli ultimi anni, è il metodo “Cartesian Cut-Cell”, che prevede una discretizzazione delle equazioni su una griglia cartesiana non conforme ai bordi del dominio. In questo caso la creazione della griglia non comporta difficoltà e possiamo utilizzare le equazioni senza ulteriori trasformazioni, mentre particolare attenzione è richiesta nell'imporre le condizioni al contorno.

La scelta è dunque ricaduta su tale metodo, analizzato in dettaglio nella sezione successiva.

7.2 Metodo ai volumi finiti: “Cartesian Cut-Cell”

Come detto, utilizzare una griglia cartesiana ci permette di mantenere la semplicità delle equazioni, inoltre tale metodo risulterebbe oltremodo vantaggioso qualora avessimo a che fare con contorni mobili, poichè la griglia è creata indipendentemente dalla posizione dei bordi del dominio. L'ovvia complicazione derivante dall'usare una griglia cartesiana si ha nell'imposizione delle condizioni al contorno. In particolare, poichè i confini del dominio intersecano la griglia in maniera del tutto casuale, lo scopo principale è creare una procedura che non abbia un impatto negativo sull'accuratezza del metodo utilizzato per risolvere il sistema di equazioni. Di seguito viene presentata tale procedura, dovuta a Udaykumar e Shyy [19], che utilizza un approccio ai volumi finiti.

7.2.1 Metodologia numerica

Il metodo numerico ai volumi finiti utilizza la forma integrale delle equazioni (6.1)-(6.5). Il dominio è suddiviso in una serie di volumi di controllo tramite una griglia che, contrariamente al metodo alle differenze finite, definisce il contorno di tali volumi, non i nodi computazionali; il nodo viene assegnato al centro di ogni volume di controllo. Creata la griglia, si scrivono le equazioni per ogni volume di controllo, andando ad approssimare gli integrali di volume e di superficie. Il metodo più semplice, accurato al secondo ordine, di approssimazione degli integrali di volume, consiste nel sostituire l'integrale con il prodotto del valor medio dell'integrando per il volume elementare:

$$\int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx q_p \Delta\Omega \quad (7.1)$$

dove q_p è il valore di q nel centro della cella.

Gli integrali di superficie vengono approssimati in funzione dei valori dell'integrando nei centri delle superfici che delimitano i volumi di controllo; tali valori, a loro volta, sono funzione dei valori nodali.

Consideriamo la cella di figura 7.2. Se vogliamo calcolare un integrale di

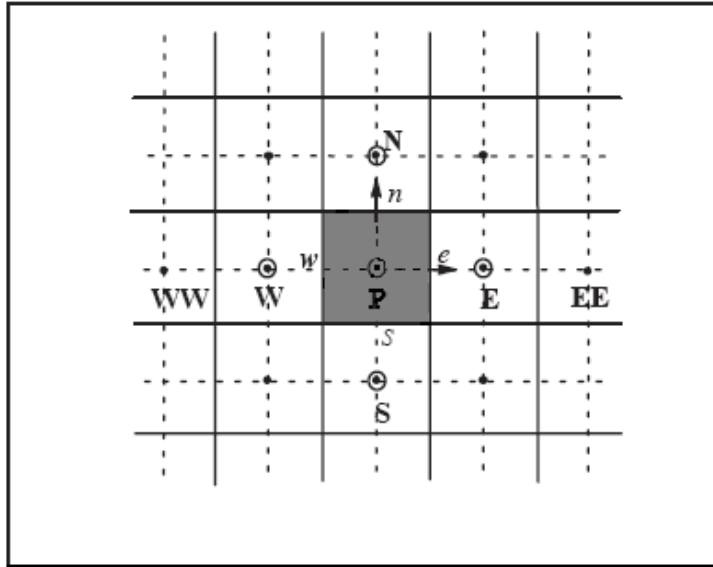


Figura 7.2: Tipica cella Cartesiana 2D

superficie su uno dei quattro lati che delimitano la cella, il metodo più semplice che mantiene l'accuratezza richiesta, è la regola del valore medio; per

la faccia Est, ad esempio:

$$\int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e \quad (7.2)$$

con, al solito, f_e valore di f nel centro di S_e . Resta ora da stabilire una procedura che permetta di ricavare tale valore in funzione dei valori nei punti nodali, preservando l'accuratezza del secondo ordine.

Celle interne al dominio

Per le celle interne al dominio si è scelta un'interpolazione lineare tra i due nodi più vicini. Sempre considerando la faccia Est di figura 7.2, avremo:

$$f_e = f_E \zeta_e + f_P (1 - \zeta_e) \quad (7.3)$$

dove il fattore interpolante ζ_e è definito:

$$\zeta_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (7.4)$$

Assumere un profilo lineare tra i nodi P ed E, ci offre anche una semplice approssimazione per i gradienti che compaiono nelle nostre equazioni:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_e \approx \frac{f_E - f_P}{x_E - x_P} \quad (7.5)$$

Celle di confine

Per le celle di confine sono necessarie prima di tutto delle modifiche, che andiamo a definire (vedere figura 7.3):

1. Il contorno del dominio è rappresentato da una serie di segmenti, ricavati tracciando delle linee rette tra i punti di intersezione del contorno reale con le facce laterali della griglia.
2. Le celle il cui centro giace all'interno del dominio vengono modificate eliminando la parte che giace all'esterno.
3. Le celle il cui centro giace all'esterno del dominio non vengono considerate, mentre la parte interna viene assorbita dalle celle vicine.

Vengono così a crearsi delle celle trapezoidali simili a quella presentata in figura 7.4a.

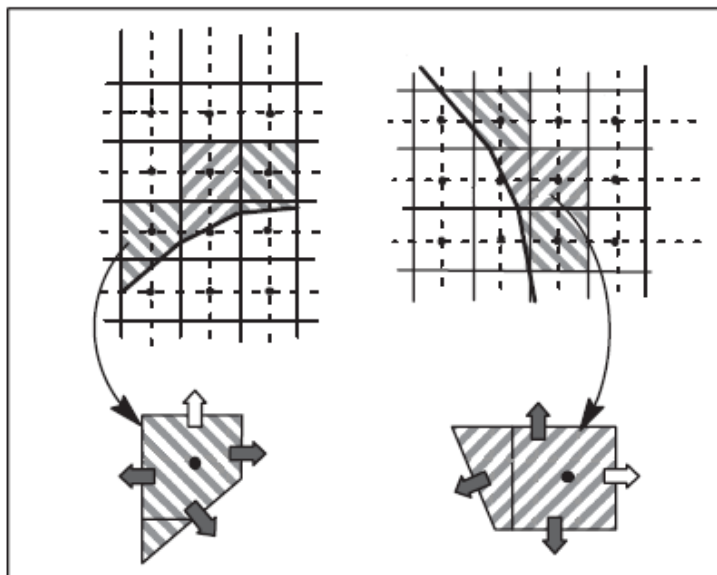


Figura 7.3: Modifiche preliminari per le celle di confine

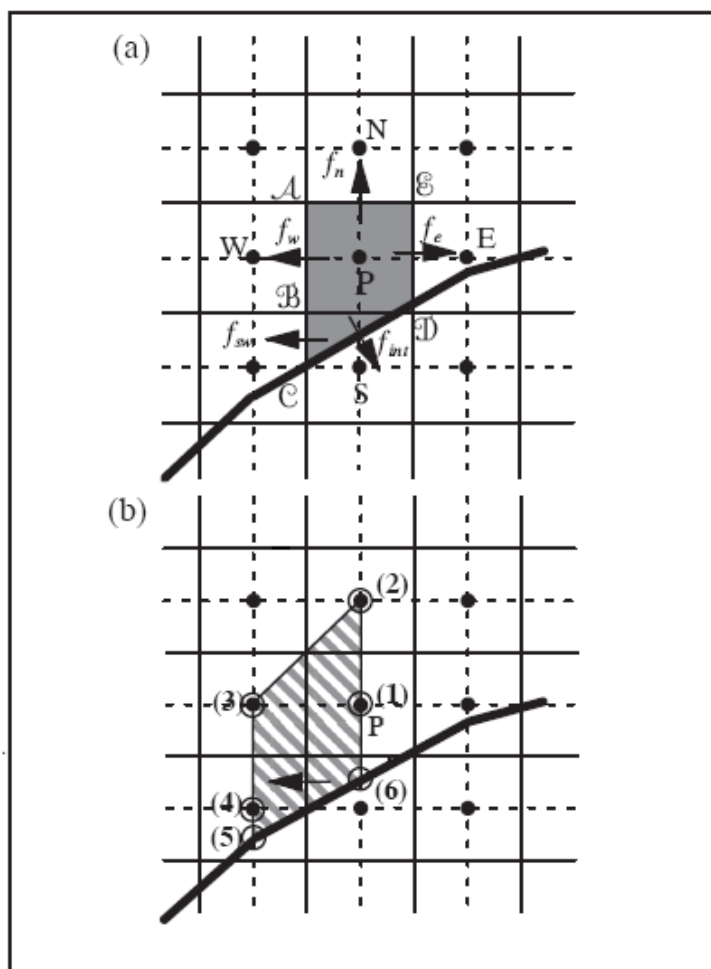


Figura 7.4: Cella trapezoidale e punti interpolanti

Consideriamo, ad esempio, il valore f_{sw} . Approssimiamo tale valore utilizzando una funzione interpolante polinomiale, che mantenga l'accuratezza del secondo ordine. Scegliamo una funzione lineare in x e quadratica in y :

$$f = c_1xy^2 + c_2y^2 + c_3xy + c_4y + c_5x + c_6 \quad (7.6)$$

che permette di ricavare anche il gradiente:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = c_1y^2 + c_3y + c_5 \quad (7.7)$$

In figura 7.4b notiamo che la regione di interpolazione è delimitata da quattro punti nodali e da due punti sul contorno. Possiamo, perciò, esprimere i sei coefficienti incogniti dell'equazione (7.6), in funzione dei valori di f in questi sei punti, arrivando a scrivere:

$$f_{sw} = c_1x_{sw}y_{sw}^2 + c_2y_{sw}^2 + c_3x_{sw}y_{sw} + c_4y_{sw} + c_5x_{sw} + c_6 \quad (7.8)$$

dove i c_n contengono i valori f_j , $j = 1 \dots 6$, e dove x_{sw}, y_{sw} sono le coordinate del centro della faccia SW della cella. In definitiva:

$$f_{sw} = \sum_{j=1}^6 \alpha_j f_j \quad (7.9)$$

e similmente:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{sw} = \sum_{j=1}^6 \beta_j f_j \quad (7.10)$$

Per quanto riguarda la faccia giacente sul contorno facciamo riferimento alla figura 7.5. Il valore locale di f è un'incognita del nostro problema, quello che ci interessa approssimare è il gradiente. Il gradiente in direzione x si ottiene con la stessa procedura delle equazioni (7.6)-(7.10), ma utilizzando i sei punti di 7.5b per ricavare i c_n . Il gradiente in direzione y si ricava esprimendo la variazione di f in direzione verticale in termini quadratici in y :

$$f = a_1y^2 + a_2y + a_3 \quad (7.11)$$

dove i coefficienti a_m si ricavano in funzione del valore di f nei tre punti indicati in figura 7.5a. Conseguentemente, il gradiente è dato da:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2a_1y + a_2 = \sum_{j=1}^3 \tau_j f_j \quad (7.12)$$

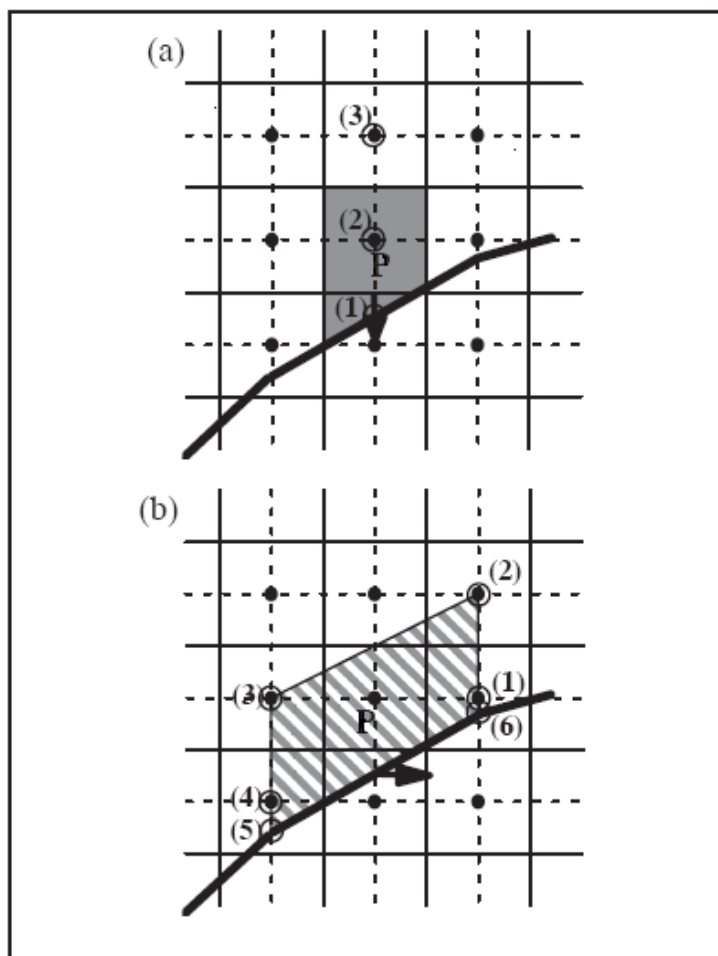


Figura 7.5: Punti interpolanti per i gradienti sul contorno

7.2.2 Considerazioni sul metodo

Il metodo che abbiamo analizzato ci permette di mantenere l'accuratezza voluta utilizzando una semplice griglia Cartesiana. Bisogna notare, inoltre, che i coefficienti α, β e a dipendono solo dalla forma del contorno e dalla griglia, perciò vengono calcolati una volta sola all'inizio della procedura di risoluzione delle equazioni. D'altra parte, l'interpolazione polinomiale richiede di calcolare sei coefficienti per ogni lato interno al dominio delle celle di confine, e ben nove coefficienti per il lato appoggiato al contorno. La procedura numerica da implementare risulta pertanto complicata, tanto più se si pensa che non sono note a priori forma e dimensioni delle celle di confine.

7.3 Equazioni in forma integrale

Come detto nella sezione precedente, il metodo utilizzato prevede la formulazione delle equazioni (6.1)-(6.5) in forma integrale. Riscriviamo le (6.2)-(6.4) in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} \frac{B}{\beta_H}(1 + \beta_H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{\beta_H} & 0 \\ \beta_H & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ j_t \\ j_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla(n_e k T_e) \big|_n \\ \nabla(n_e k T_e) \big|_t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_e q \nabla(\phi) \big|_n \\ n_e q \nabla(\phi) \big|_t \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ \dots - \begin{pmatrix} m_e(R_m + N_P) \mathbf{u}_a \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ m_e(R_m + N_P) \mathbf{u}_a \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed in forma compatta:

$$\mathbf{j} = \mathbf{H}(B) \cdot [\nabla(n_e k T_e) - n_e q \nabla(\phi) - m_e(R_m + N_P) \mathbf{u}_a] \quad (7.13)$$

dove

$$\mathbf{H}(B) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_H}{B(1+\beta_H^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_H}{B} & 0 \\ -\frac{\beta_H^2}{B(1+\beta_H^2)} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Integriamo l'equazione di continuità:

$$\int_{V_{ij}} (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV_{ij} = - \int_{V_{ij}} (qN_p) dV_{ij}$$

Sostituendo \mathbf{j} ed usando il teorema della divergenza, risulta:

$$\int_{\partial V_{ij}} (\mathbf{H}(B) \cdot [\nabla(n_e k T_e) - n_e q \nabla(\phi) - m_e(R_m + N_p)\mathbf{u}_a]) \cdot \mathbf{n} dS_{ij} = - \int_{V_{ij}} (qN_p) dV_{ij} \quad (7.14)$$

che rappresenta un'equazione per l'unica incognita ϕ , se si assume nota la temperatura.

Similmente, integrando l'equazione dell'energia, otteniamo:

$$\begin{aligned} - \int_{\partial V_{ij}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS_{ij} - \int_{V_{ij}} \left(\left(\frac{5}{2} k T_e + E_{ion} \right) N_P + 3 k T_e \frac{m_e}{m_a} R_m \right) dV_{ij} + \dots \\ \dots + \int_{V_{ij}} \left(\mathbf{j} \cdot \nabla \left[\frac{5k}{2q} T_e - \phi \right] \right) dV_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Ricordando che, dall'equazione di continuità,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -qN_p$$

otteniamo, in definitiva, l'equazione cercata per la temperatura:

$$\begin{aligned} - \int_{\partial V_{ij}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS_{ij} = \int_{V_{ij}} \left((q\phi + E_{ion}) N_P + 3 k T_e \frac{m_e}{m_a} R_m \right) dV_{ij} + \dots \\ \dots - \int_{\partial V_{ij}} \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \left[\frac{5k}{2q} T_e - \phi \right] \right) dS_{ij} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Riferendoci a quanto detto nella sezione 6.1, scriviamo le equazioni (7.14), (7.16) in forma adimensionale:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \hat{V}_{ij}} \frac{\hat{\mathbf{H}}}{\xi_2} \cdot \left[\xi_4 \hat{n}_e \hat{\nabla}(\hat{T}_e) - \hat{n}_e \hat{\nabla}(\hat{\phi}) \right] \cdot \mathbf{n} \frac{dS_{ij}}{H_{ch}^2} + \dots \\ & \dots - \int_{\partial \hat{V}_{ij}} \frac{\hat{\mathbf{H}}}{\xi_2} \cdot \left[2(\hat{R}_m + \hat{N}_P) \xi_1 \xi_5 \xi_6 \hat{\mathbf{u}}_a \right] \cdot \mathbf{n} \frac{dS_{ij}}{H_{ch}^2} = - \int_{\hat{V}_{ij}} (\xi_1 \hat{N}_p) d\hat{V}_{ij} \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{V}_{ij}} \left(\xi_1 \xi_4 \hat{N}_P + \xi_1 \hat{\phi} \hat{N}_P + 3 \xi_1 \xi_4 \xi_5 \hat{T}_e \hat{R}_m \right) d\hat{V}_{ij} + \dots \\ & \dots + \int_{\partial \hat{V}_{ij}} \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{5}{2} \xi_4 \hat{T}_e - \hat{\phi} \right) \frac{dS_{ij}}{H_{ch}^2} = - \int_{\partial \hat{V}_{ij}} \xi_3 \xi_4 (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \frac{dS_{ij}}{H_{ch}^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

dove sono stati definiti:

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}(\dots) &= L_{ch} \nabla(\dots) = \left[\frac{\hat{r} \hat{B}}{\xi_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \hat{\mathbf{n}} + \hat{B} \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} \hat{\mathbf{t}} \right] \\ \hat{\nabla} \cdot (\dots) &= L_{ch} \nabla \cdot (\dots) = \hat{B}^2 \left[\frac{\partial(\frac{\hat{r}}{\hat{B}} \dots)}{\xi_0 \partial \hat{\lambda}} + \frac{\partial(\frac{1}{\hat{B}} \dots)}{\partial \hat{\mu}} \right] \\ d\hat{V} &= \frac{dV}{L_{ch} H_{ch}^2} = \frac{d\hat{\mu} d\hat{\lambda} d\vartheta}{\hat{B}^2} \\ \hat{\mathbf{H}} &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_H}{\hat{B}(1+\beta_H^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_H}{\hat{B}} & 0 \\ -\frac{\beta_H^2}{\hat{B}(1+\beta_H^2)} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{q}} &= -\hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\nabla}(\hat{T}_e) \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_n & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_t & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.4 Generazione della griglia

La soluzione del problema presentato richiede la costruzione di due griglie cartesiane, una per la soluzione del problema differenziale che permette il passaggio di coordinate, ed una per la discretizzazione delle equazioni finali. Ambedue le griglie sono state costruite definendo i seguenti parametri:

- numero di celle in ordinate (asse r o μ);
- numero di celle in ascisse (asse z o λ);
- fattore di progressione geometrica per scalare lungo le ordinate α_1
(es. $dr_{j+1} = dr_j \cdot \alpha_1$)
- fattore di progressione geometrica per scalare lungo le ascisse α_2
(es. $dz_{i+1} = dz_i \cdot \alpha_2$)

La scelta finale dei parametri suddetti deriva da un compromesso tra una soddisfacente risoluzione spaziale ed un ragionevole tempo di calcolo.

In figura 7.6 è mostrata la griglia utilizzata per la discretizzazione delle equazioni finali.

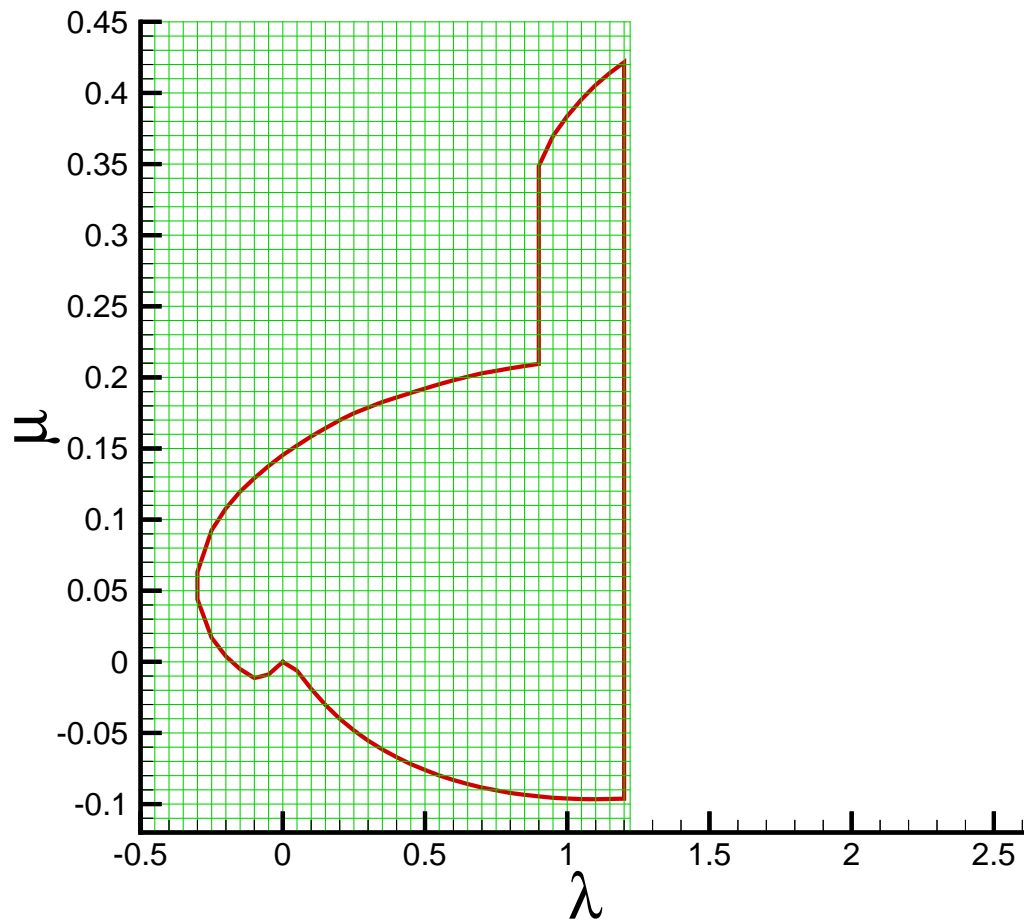


Figura 7.6: Griglia Cartesiana sul dominio modificato

La figura 7.7 mostra il confronto tra il contorno reale del dominio ed il contorno modificato per l'implementazione del metodo “Cut-Cell”.

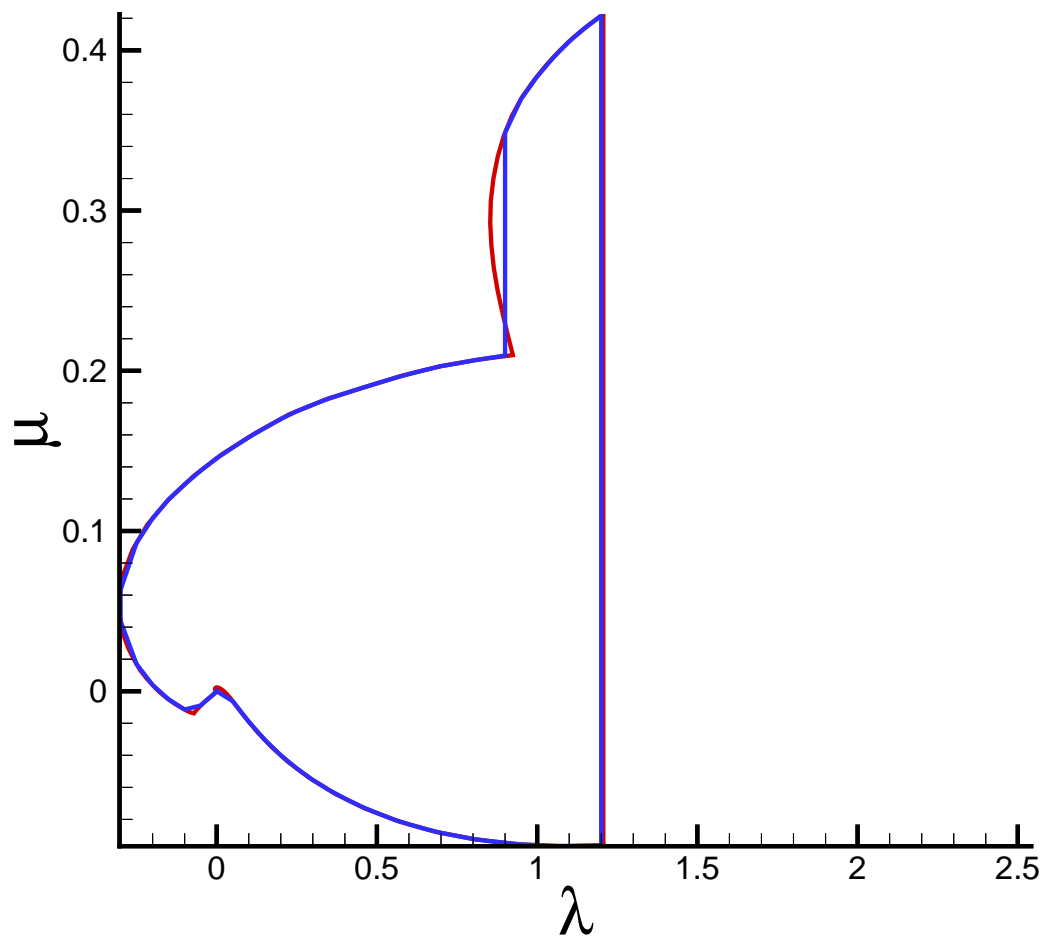


Figura 7.7: Confronto tra contorno reale e contorno modificato

7.5 Schema di calcolo

Il codice risolutivo è stato implementato in ambiente MATLAB. Inizialmente vengono caricati i dati di progetto e definite le condizioni iniziali. Successivamente si procede alla soluzione del problema differenziale che definisce il passaggio di coordinate, e si implementa il metodo “Cartesian Cut-Cell”, come descritto nelle sezioni precedenti. A questo punto si entra in un ciclo iterativo di soluzione delle equazioni (7.18) e (7.17), rispettivamente per la Temperatura e per il Potenziale. La convergenza dell'intero codice è valutata sulla differenza relativa tra due soluzioni consecutive per il Potenziale Elettrico.

La sequenza di esecuzione è mostrata schematicamente in figura 7.8.

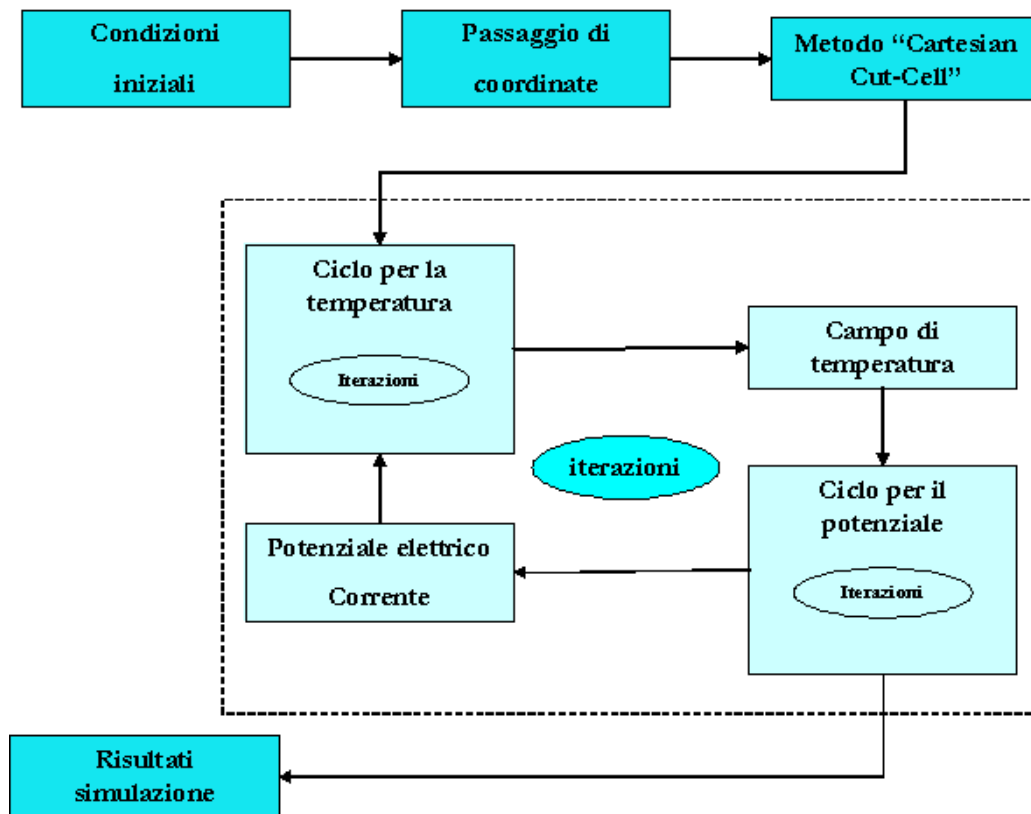


Figura 7.8: Schema di esecuzione del codice

Parte III

Risultati e Conclusioni

Capitolo 8

Risultati

Questa tesi descrive la simulazione numerica del moto degli elettroni in un tipico motore ad effetto Hall. I risultati finali della simulazione possono essere usati per una prima analisi delle proprietà del fluido elettronico all'interno del canale accelerativo del motore.

8.1 Validazione del codice

Per convalidare il codice sono state effettuate delle simulazioni assumendo dei campi tipici di velocità e densità degli ioni e dei neutri. Tali dati derivano dall'interpolazione analitica dei risultati numerici di altre simulazioni, spesso consideranti solo distribuzioni unidimensionali (vedere sezione 6.3).

Anche se i motori ad effetto Hall hanno un comportamento non stazionario, i risultati della simulazione dimostrano di essere in buon accordo con i campi mediati nel tempo che possiamo aspettarci all'interno del canale accelerativo. Le seguenti sezioni mostrano i principali campi sui quali abbiamo focalizzato l'analisi.

8.1.1 Potenziale Elettrico

La figura 8.1 mostra il potenziale elettrico.

Nella zona interna del canale il potenziale è circa costante. Nella parte di

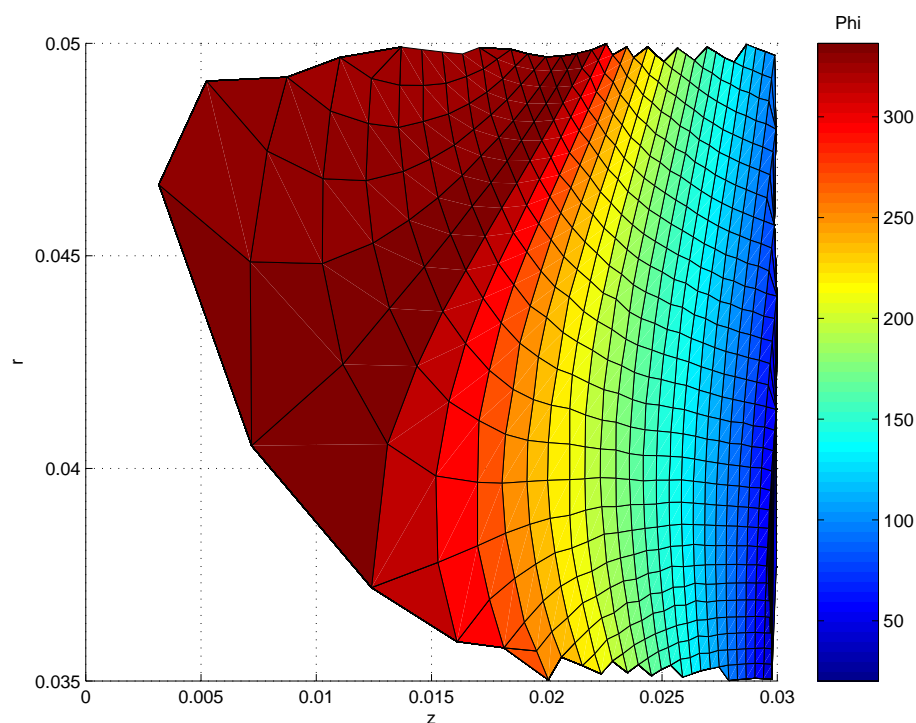


Figura 8.1: Potenziale elettrico, [V]

canale prossima all'uscita si ha un andamento decrescente, con la massima caduta nella regione dove il campo magnetico è più intenso.

Nonostante una buona corrispondenza tra linee di campo magnetico e linee equipotenziali, sono presenti dei gradienti di potenziale in direzione tangente al campo magnetico. L'approccio completamente bidimensionale di questo lavoro rende possibile analizzare tali gradienti.

8.1.2 Temperatura

La figura 8.2 mostra la temperatura elettronica.

Lungo linee di campo magnetico la temperatura è circa costante, anche se sono presenti dei gradienti in direzione tangenziale, soprattutto in prossimità delle pareti.

Partendo dal catodo, dove la temperatura è fissata dalle condizioni di emissione degli elettroni, si ha un aumento fino ad un valore di picco dovuto al riscaldamento Ohmico per effetto del ripido profilo di potenziale. Dopo il picco, nella zona a profilo di potenziale piatto, la temperatura decresce per le perdite energetiche dovute alle collisioni.

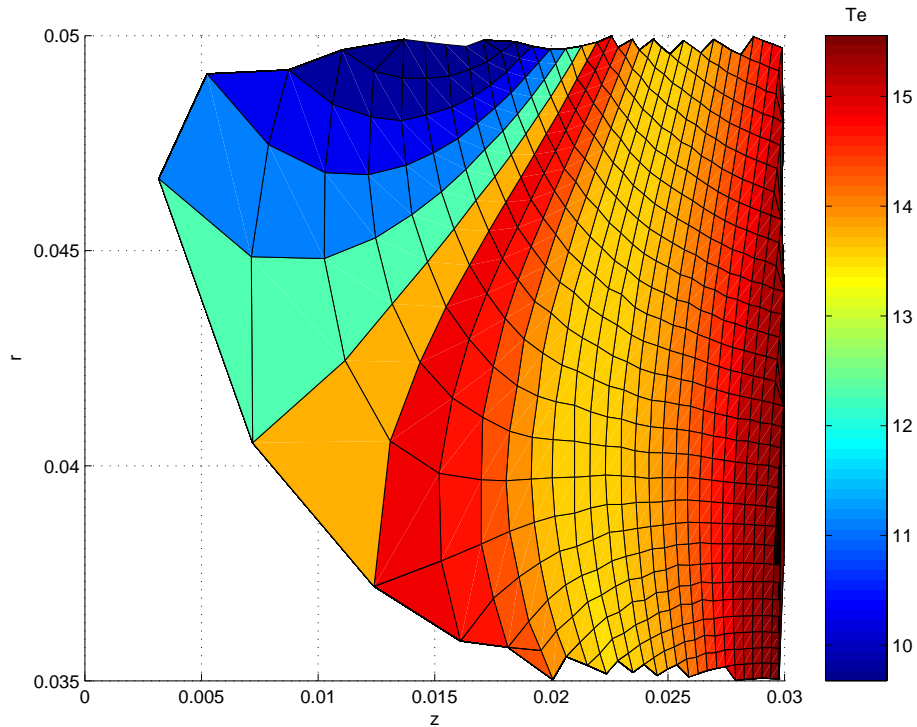


Figura 8.2: Temperatura elettronica, [eV]

8.1.3 Parametro di Hall

La figura 8.3 mostra il parametro di Hall, β_H .

L'andamento segue l'intensità del campo magnetico, arrivando a valori molto alti in prossimità dell'uscita del canale dove il campo magnetico è più intenso; tali valori confermano il carattere non collisionale del plasma.

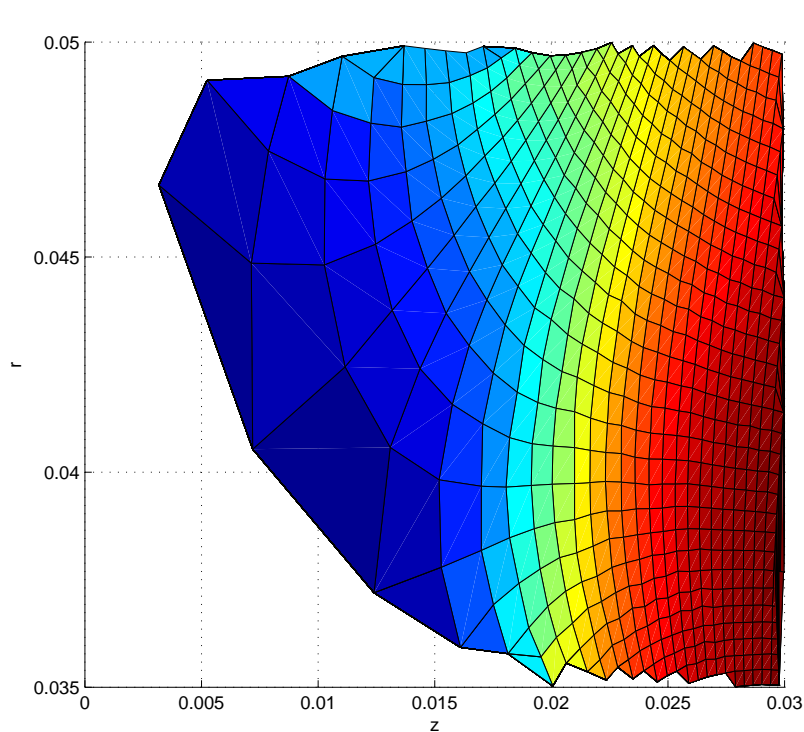


Figura 8.3: Parametro di Hall, β_H

8.1.4 Rateo di ionizzazione

Il rateo di ionizzazione ha un ruolo fondamentale nella fisica di un HET. I principali parametri che influenzano la ionizzazione sono la temperatura elettronica e la densità dei neutri (vedere equazione 4.46). Infatti, nonostante gli alti valori di temperatura nella zona prossima all'uscita del canale, la regione di ionizzazione principale si colloca nella parte più interna, dove la densità dei neutri è maggiore.

L'andamento del rateo di ionizzazione è riportato in figura 8.4.

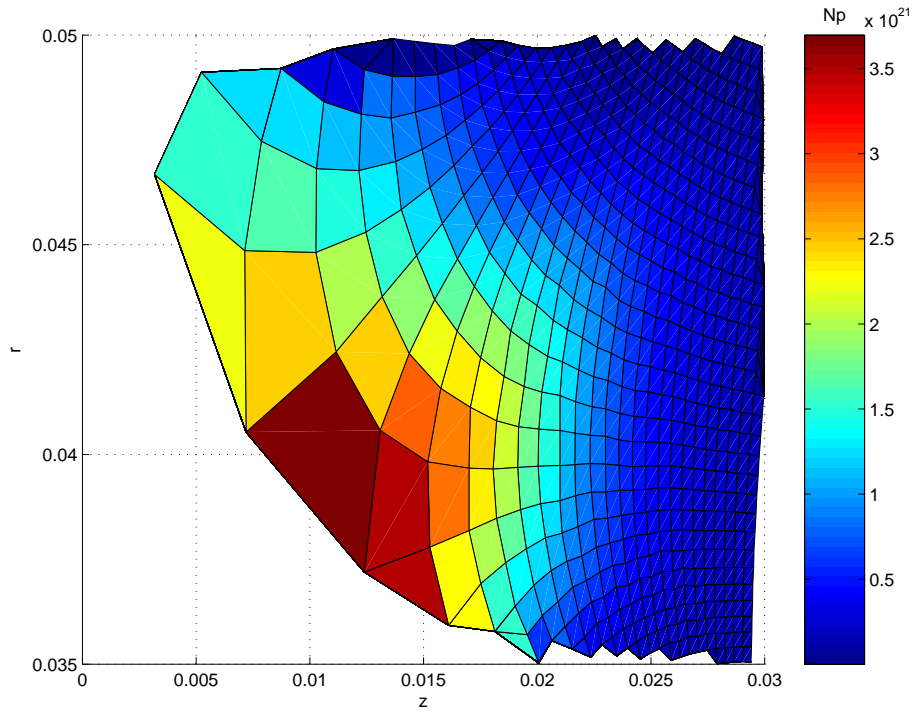


Figura 8.4: Rateo di ionizzazione, $[m^{-3}s^{-1}]$

Capitolo 9

Conclusioni

Come visto nel precedente capitolo, i risultati ottenuti dalle prime simulazioni avvalorano le scelte fatte nell'implementazione del codice. Pertanto, la speranza è che il presente lavoro costituisca una buona base di partenza per successivi sviluppi nel campo della ricerca numerica sui motori ad effetto Hall.

9.1 Aspetti caratteristici del codice

Nel presente lavoro abbiamo realizzato un codice numerico per l'analisi del comportamento degli elettroni all'interno del canale accelerativo di un motore ad effetto Hall. Alcuni aspetti del codice lo differenziano significativamente dai precedenti lavori presentati. Tra questi ricordiamo:

- Il codice implementato è completamente bidimensionale.
- Le equazioni di quantità di moto, conservazione della carica ed energia sono scritte in un sistema di coordinate magnetiche, risulandone così semplificata la scrittura.
- Non vengono fatte ipotesi semplificative sul campo magnetico e sui campi di corrente.
- La conducibilità termica degli elettroni è valutata sia lungo linee di campo magnetico, sia in direzione ortogonale ad esse, rifiutando l'ipotesi semplificativa di potenziale termalizzato (vedere appendice B).
- Viene considerata la diffusione anomala, introducendo una frequenza di collisione equivalente.

- Viene considerato il problema della guaina imponendo delle opportune condizioni al contorno, rispettando la fisica del problema.
- Il coefficiente di emissione secondaria è espresso in funzione della temperatura elettronica.
- Si utilizza un metodo “Cartesian Cut-Cell” per la risoluzione delle equazioni.

9.2 Integrazione con un codice PIC

Lo scopo finale del presente lavoro è di costituire un utile strumento per lo studio e la progettazione dei motori ad effetto Hall. Il codice sviluppato permette di studiare solo parte del problema, in quanto si concentra unicamente sul comportamento degli elettroni. Il naturale passo successivo alla validazione del presente codice, è una sua integrazione con un codice di tipo “Particle-In-Cell” (PIC) in grado di simulare il comportamento delle particelle pesanti, ioni e neutri. Allo stato attuale, tale integrazione non presenta particolari difficoltà, in quanto i dati in ingresso e in uscita dal codice possono interfacciarsi con altri programmi, anche non scritti in ambiente **MATLAB**. Una volta che tale integrazione sarà effettuata, il codice potrà essere usato in luogo di costosi esperimenti, riducendo anche i tempi necessari per lo sviluppo preliminare dei motori.

9.3 Sviluppi futuri

Di seguito consideriamo degli aspetti del presente lavoro che potrebbero essere sviluppati in futuro.

9.3.1 Possibili aggiunte al codice

Il codice è stato sviluppato considerando i fenomeni fisici essenziali che riguardano il comportamento dei plasmi. Tuttavia, sono stati trascurati alcuni fenomeni significativi. Successive versioni del codice dovranno includere anche questi fenomeni ed eventualmente migliorare la modellizzazione di quelli già considerati.

Ioni a carica multipla

Come detto nella sezione 4.5.2, si è supposto di considerare solo ioni semplici (Xe^+). Tuttavia, alcune misure sperimentali mostrano una popolazione

di Xe^{2+} dell'ordine del cinque per cento. Quindi, bisognerebbe includere nella simulazione ioni di Xenon a carica multipla. Ad un primo livello, occorrerebbe prendere in considerazione la produzione di Xe^{2+} a causa delle collisioni elettrone-neutro ed elettrone-ione.

Collisioni con eccitazione

Nel lavoro non abbiamo considerato un modello raffinato per le collisioni di eccitazione tra elettroni e neutri. Tali collisioni sono state trattate come collisioni elastiche (vedere sezione 4.3.1). Come primo miglioramento del codice, andrebbero modellizzate come processi inelastici, come effettivamente ci aspettiamo che accada nella realtà.

9.3.2 Il campo magnetico

Tutto il lavoro svolto si basa sul passaggio di coordinate dal sistema cilindrico a quello magnetico. Risulta chiara, quindi, l'importanza di conoscere con precisione il campo magnetico in ogni punto del canale e del getto. Eventualmente, ulteriori sviluppi del codice potranno implementare una procedura di risoluzione delle equazioni di Maxwell per il calcolo diretto del campo magnetico, note le caratteristiche ferro-magnetiche del motore e degli avvolgimenti.

9.3.3 Il metodo “Cartesian Cut-Cell”

Come detto nel capitolo 7, il metodo numerico utilizzato è il “Cartesian Cut-Cell”. Trattandosi di un metodo ancora poco usato, tale lavoro costituisce un buon banco di prova per il metodo stesso. Le difficoltà di implementazione del codice numerico, relative alla creazione delle celle ed al calcolo dei coefficienti caratteristici, lo hanno reso difficilmente generalizzabile. Pertanto successive versioni dovranno affrontare il problema di rendere la procedura completamente adattabile a qualsiasi tipologia di campo magnetico.

9.3.4 Conoscenza dei dati iniziali

La convergenza del codice si è dimostrata notevolmente influenzata dalle condizioni iniziali del campo di temperatura. Inoltre, l'accuratezza del metodo “Cut-Cell” dipende dalla precisione dei dati sul contorno del dominio computazionale. Pertanto, migliorare tale conoscenza significa aumentare l'accuratezza dei risultati. In tal senso, l'accoppiamento con un codice PIC appare la strada migliore da intraprendere.

9.3.5 Simulazione della parte esterna

Un'ulteriore sviluppo, che è possibile prendere in considerazione, riguarda la simulazione della piuma. Il presente lavoro simula già il comportamento degli elettroni nella regione prossima all'uscita del canale, dimostrando la validità del metodo anche per le regioni più esterne. Ancora una volta, una buona conoscenza dei dati relativi a tali zone è necessaria per ulteriori sviluppi in tale direzione.

Appendice A

Derivazione delle Equazioni a Singolo Fluido

Nella presente sezione ci proponiamo di ricavare le equazioni a fluido singolo, partendo dalle equazioni delle specie costituenti il plasma, seguendo quanto riportato in [11].

Riscriviamo l'equazione della quantità di moto per ogni specie che costituisce il plasma, indicando con l'indice j le diverse specie:

$$n_j m_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = n_j q (\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}) \cdots - \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{P}_j}} + \mathbf{P}_{coll,j} \quad (\text{A.1})$$

dove il termine a sinistra è proporzionale alla derivata convettiva della velocità media \mathbf{u}_j . Il termine a destra include la forza di Lorentz, la divergenza del tensore di pressione (che descrive le collisioni tra particelle della stessa specie) e lo scambio di quantità di moto dovuto alle collisioni con le altre specie presenti nel plasma.

Facciamo le seguenti ipotesi semplificative:

- solamente due specie: ioni ed elettroni;
- ipotesi di quasi-neutralità: $n_e \simeq n_i = n$;
- il termine collisionale descrive solo interazioni tra ioni ed elettroni:

$$\mathbf{P}_{ie} = -\mathbf{P}_{ei} = \frac{m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)}{\tau_{ie}} \quad (\text{A.2})$$

- il tensore di pressioni non ha componenti anisotrope (solo i termini diagonali sono diversi da zero);

- le velocità degli ioni e degli elettroni possono essere collegate, utilizzando la corrente, come segue:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{j}}{ne} \quad (\text{A.3})$$

- il termine inerziale nell'equazione degli elettroni è trascurabile data la piccola massa degli elettroni stessi.

Richiamiamo le seguenti definizioni:

$$\sigma = \frac{1}{\eta} = \frac{ne^2}{m_e} \tau_{ei} \quad (\text{A.4})$$

$$\beta = \omega_e \tau_e \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_e = \frac{qB}{m_e} \quad (\text{A.6})$$

Le equazioni di momento per le due specie si semplificano, quindi, come segue:

$$nm_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right] = nq (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -nq \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) + \dots \\ & -\nabla p_e + \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

dove l'ultimo termine sottolinea le interazioni tra le due specie.

L'equazione (A.8) si può riscrivere:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e - \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.9})$$

o in forma equivalente:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E}' - \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = \sigma \mathbf{E}' - \frac{\beta}{B} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.10})$$

L'ultima equazione viene detta “Legge di Ohm generalizzata” e descrive la relazione tra i campi e la corrente nel plasma. Il termine

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e \quad (\text{A.11})$$

rappresenta il campo elettrico in un sistema di riferimento in moto con il flusso medio delle particelle pesanti più il contributo del gradiente di pressione elettronica.

Il campo elettrico auto-consistente, generato nel plasma dall'effetto Hall, si può scrivere:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla p_e + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \quad (\text{A.12})$$

Tornando all'equazione (A.7), notiamo che le particelle pesanti sono accelerate da:

- il campo elettrico valutato in un sistema di riferimento mobile (\mathbf{E}');
- il gradiente di pressione, derivante dalle collisioni tra particelle della stessa specie;
- l'azione risultante dal trasferimento di quantità di moto dagli elettroni, attraverso le collisioni.

Le due equazioni (A.7) e (A.8) non sono accoppiate solo dal termine collisionale ($ne\mathbf{j}/\sigma$), ma hanno in comune anche il campo elettrico \mathbf{E}' .

Il termine di pressione tende a convergere se le interazioni elettroni-ioni sono sufficientemente intense da raggiungere condizioni di equilibrio, altrimenti le due temperature e le pressioni rimangono differenti per tutta la fase accelerativa.

La situazione è riassunta in figura A.1, dove si è trascurato il termine di pressione per rendere più semplice la rappresentazione. Come si può facilmente vedere, la situazione può essere riassunta in questo modo: gli elettroni accelerano sotto l'azione del campo elettrico risultante dalla somma del campo visto in un sistema di riferimento in moto con il fluido più la componente associata con la velocità relativa del fluido elettronico rispetto al flusso medio. Se il termine inerziale è trascurabile, tutta la quantità di moto così acquisita è trasferita agli ioni tramite collisioni. Inoltre gli ioni rispondono allo stesso campo elettrico, acquisendo direttamente quantità di moto.

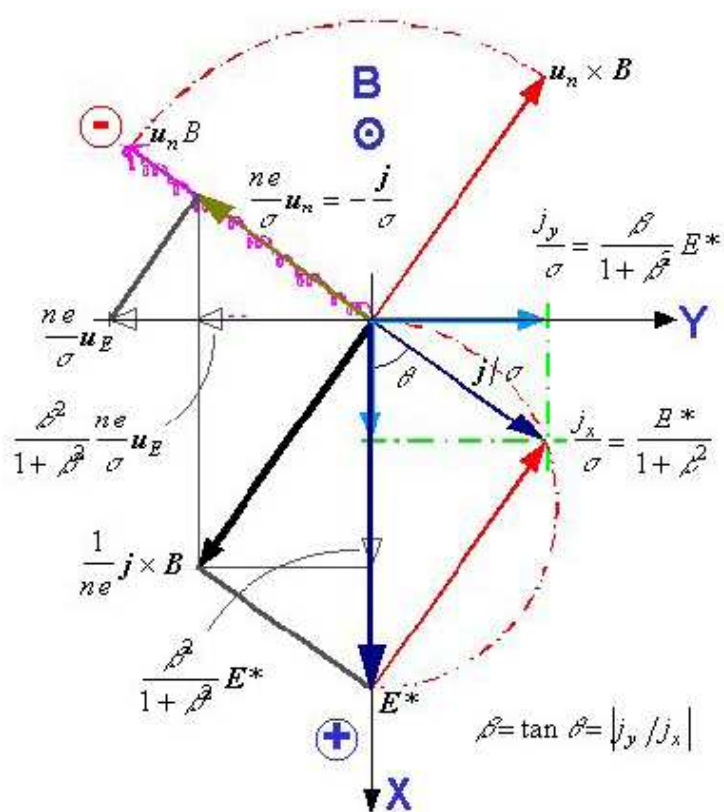


Figura A.1: Diagramma vettoriale di un propulsore ad effetto Hall

Combinando le equazioni (A.7) e (A.8) e definendo:

$$\nabla p = \nabla p_e + \nabla p_i \quad (\text{A.13})$$

$$\rho = nm_i \quad (\text{A.14})$$

otteniamo infine:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.15})$$

utilizzata nella sezione 2.3.

Vale la pena notare che la forza complessiva $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, descritta finora come risultante dalle componenti lungo \mathbf{E} e lungo $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$, può essere decomposta lungo due direzioni rispettivamente parallela ed ortogonale ad \mathbf{E} . Quest'ultima coincide con la direzione del centro guida di deriva degli elettroni rispetto al flusso medio di particelle pesanti. In questo caso possiamo scrivere l'equazione (A.7) in una forma che sottolinea il ruolo del parametro di Hall:

$$nm_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right] + \nabla p = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \left[nq\mathbf{E} + n \frac{m_e}{\tau_{ei}} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \right] \quad (\text{A.16})$$

Tutti i propulsori a plasma si basano su uno o più effetti inclusi nella precedente equazione. I propulsori gasdinamici e gli arcogetti si basano totalmente sui gradienti di pressione; i propulsori a ioni su un campo elettrostatico generato dall'esterno; gli MPD accelerano le particelle principalmente per il contributo collisionale mentre gli HET accelerano le particelle lungo il campo elettrico auto-consistente associato con l'effetto Hall.

L'equazione di conservazione dell'energia per le due specie può essere ricavata moltiplicando le equazioni (A.7) e (A.8) scalarmente per \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_e rispettivamente:

$$\mathbf{u}_i \cdot \rho \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \left(ne\mathbf{E} - \nabla p_i - \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{u}_i \quad (\text{A.17})$$

$$0 = \left(-nq\mathbf{E} - \nabla p_e + \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{u}_e \quad (\text{A.18})$$

L'ultimo termine nella (A.18) può essere elaborato usando l'equazione (A.3). Otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{u_i^2}{2} \right) = \left(ne\mathbf{E} - \nabla p_i - \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{u}_i \quad (\text{A.19})$$

$$0 = (-nq\mathbf{E} - \nabla p_e) \cdot \mathbf{u}_e + \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_i - \frac{j^2}{\sigma} \quad (\text{A.20})$$

dove il termine $ne/\sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_i$ rappresenta il termine collisionale che descrive lo scambio di potenza per attrito tra elettroni e ioni, mentre il termine j^2/σ rappresenta il riscaldamento di Joule. Sommando le due equazioni (A.19) e (A.20) i termini collisionali si elidono:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{u_i^2}{2} \right) = -\nabla p_i \cdot \mathbf{u}_i - \nabla p_e \cdot \mathbf{u}_e + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{j^2}{\sigma} \quad (\text{A.21})$$

Se vogliamo rendere esplicito il ruolo della forza di Lorentz, utilizziamo l'equazione (A.12) moltiplicandola scalarmente per \mathbf{j} :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -(\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{ne} \nabla p_e \cdot \mathbf{j} + \frac{j^2}{\sigma} \quad (\text{A.22})$$

Rielaborando tale equazione, possiamo scrivere

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{j^2}{\sigma} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_i - \frac{1}{ne} \nabla p_e \cdot \mathbf{j} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_i - \frac{1}{ne} \nabla p_e \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (\text{A.23})$$

cosicchè l'equazione (A.21) diviene in definitiva:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\nabla p \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.24})$$

dove si è considerata la velocità del fluido $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$.

Appendice B

Potenziale Termalizzato ed Approcci Alternativi

Un'ipotesi molto comune nelle simulazioni numeriche sugli HET è assumere che il coefficiente di diffusione degli elettroni lungo linee di campo magnetico sia molto più grande del coefficiente di diffusione in direzione ortogonale (per esempio [14], [16]).

Ignorando l'effetto dello specchio magnetico, si può scrivere un bilancio tra il termine di pressione e la forza elettrica lungo linee di campo magnetico:

$$\frac{\partial(n_e k T_e)}{\partial \hat{t}} = q n_e \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} \quad (\text{B.1})$$

che, assumendo una temperatura elettronica costante lungo linee di campo magnetico, fornisce:

$$\phi - \frac{k T_e}{q} \ln n_e = \phi_0 - \frac{k T_e}{q} \ln n_{e,0} \quad (\text{B.2})$$

L'espressione a destra è, quindi, costante per ogni linea di campo. Indichiamo questa costante con ϕ' ; essa è funzione della posizione valutata su una coordinata curvilinea ortogonale alle linee di campo magnetico.

Le assunzioni precedenti riducono il problema bidimensionale dell'equazione elettronica di quantità di moto, ad un problema monodimensionale; tuttavia, questa semplificazione porta a sensibili discrepanze con i valori misurati, come riportato in [14].

Bibliografia

Testi di riferimento

- [1] R.G. Jahn, *Physics of Electric Propulsion*,
- [2] M. Andrenucci, *Dispense di Fisica dei Plasmi*, n.p.
- [3] F.F. Chen, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, New York, 1984
- [4] Mitchner, Krueger, *Partially Ionized Gases*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- [5] M.R. Spiegel, *Analisi Vettoriale*, Etas Libri
- [6] J.H. Ferziger, M.Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer ed., Berlin, 2002
- [7] I.H. Hutchinson, *Principles of Plasma Diagnostics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990 Mc Graw-Hill book Company, New York, 1968
- [8] Fletcher, *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer Series
- [9] P. Roger *Handbook of Computational Fluid Mechanics*, Academic Press, San Diego, 1996
- [10] E.F. Toro *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Germany, 1999

Articoli ed altri lavori

- [11] M. Andrenucci, L. Biagioni, S.Marcuccio, F.Paganucci, *Fundamental Scaling Laws for Electric Propulsion Concepts*, Lerici International Workshop, 2003
- [12] C.A. Lentz, *Transient One Dimensional Numerical Simulation of Hall Thrusters*, S.M. Thesis, Massachussets Institute of Technology, Boston, 1993
- [13] J.M. Fife, *Two-Dimensional Hybrid Particle-In-Cell Modeling of Hall Thrusters*, Master's Thesis, Massachussets Institute of Technology, Boston, 1995
- [14] J.M. Fife, *Hybrid-PIC Modeling and Electrostatic Probe Survey of Hall Thrusters*, Massachussets Institute of Technology, Boston, 1998
- [15] J.J. Szabo Jr., *Fully Kinetic Numerical Modeling of a Plasma Thruster*, Massachussets Institute of Technology, Boston, 2001
- [16] L. Garrigues, *Modelisation d'un propulseur a plasma stationnaire pour satellites*, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998
- [17] T. Andreussi, M. de Renzi, *Hybrid-PIC modeling of Hall thruster acceleration channels*, Tesi di Laurea, Università di Pisa, Pisa, 2003
- [18] S. Roy, B.P. Pandey, *Numerical Investigation of a Hall thruster plasma*, Physics of Plasmas, September 2002
- [19] H.S.Udaykumar, W. Shyy, *A Cartesian Grid Method For Viscous Incompressible Flows With Complex Immersed Boundaries*, AIAA, 1999
- [20] M. Berti, M. Saverdi, A. Passaro, *Studio di fenomeni fisici fondamentali in propulsori spaziali ad effetto Hall*, Centropazio i.p., Pisa, 2003
- [21] I. D. Boyd, J. T. Yim *Hall Thruster Plume Simulation Using a Detailed Hybrid Model*, AIAA, 2004
- [22] F. I. Parra, E. Ahedo *Fulfillment of the Bohm condition on the 'HPHall' fluid-PIC code*, AIAA, 2004
- [23] H.Forrer *Boundary Treatment for a Cartesian Grid Method*, 1996
- [24] M. J. Aftosmis *Solution adaptive Cartesian grid methods for aerodynamic flows with complex geometries*, NASA Ames

-
- [25] S. Roy, B.P. Pandey, *Development of a Finite Element based Hall Thruster Model for Sputter Yield Prediction*, IEPC, 2001
- [26] F. Taccogna, S. Longo, M. Capitelli, *Plasma-surface interaction model with secondary electron emission effects*, Bari
- [27] M. Keidar, I.D. Boyd *Plasma flow and plasma-wall transition in Hall thruster channel*, Physics of Plasma, 2001
- [28] M. Keidar, I.D. Boyd, *Analyses of the anode region of a Hall Thruster Channel*, AIAA, 2002
- [29] M. Saverdi, *Modello numerico 1D*, n.p.

Legenda

”n.p.” significa lavoro non pubblicato